



مهندسان شیمی تهران  
www.ChemEng.ir

## جزوه

نام دانشگاه: تربیت مدرس

نام درس: انتقال حرارت پیشرفته



بر گزارکننده دوره های تخصصی مهندسی شیمی  
تولید محتوای آموزشی به صورت فیلم، متن و...



<https://telegram.me/chemicalengineering>



<https://www.instagram.com/chemeng.ir>

## انتقال حرارت پیشرفته

### جلسه هفتم

مروری بر روابط ریاضی ضروری برای مسائل پایای دو و سه بعدی

### فهرست مطالب

۱. فهرست مطالب..... ۱
۲. مقدمه ..... ۲
۳. مسائل مقدار مرزی، مسائل مقدار مشخصه..... ۳
۴. تعامل توابع مشخصه..... ۷
۵. بسط توابع دلخواه به صورت سری توابع متعامد..... ۱۰
۶. سری‌های فوریه..... ۱۱
۷. خلاصه (جمع‌بندی)..... ۲۱
۸. فهرست منابع..... ۲۲

## بسم الله الرحمن الرحيم

### ۱. مقدمه

مباحث قبلی مان به مسائل یک بعدی پایا محدود می شد. به طور کلی از آنجایی که این گونه مسائل، معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حاصل می کنند، معمولاً قابل حل می باشند. به عبارت دیگر، مسائل پایای دو و سه بعدی و مسائل ناپایا، معادلات دیفرانسیل پاره ای را حاصل می کنند، که هیچ راه حل کلی برای آنها وجود ندارد. در این فصل و فصل بعد، چندین روش برای حل دقیق این مسائل ارائه شده است.

وقتی که مرزهای یک مسأله، هدایت چند بعدی متناظر با سطوح مختصات در یک سیستم مختصات متعامد مثل مختصات های کارتزین، استوانه ای، یا کروی باشد، یک راه دقیق توسط روش های تحلیلی امکان پذیر خواهد بود. یک روش متداول بر اساس جداسازی متغیرها، و دیگری بر اساس تبدیل لاپلاس می باشد. دلایل متقاعدکننده ای وجود دارد که نشان می دهند این دو روش متداول تر، برای حل مسائل ویژه مناسب ترند؛ اگرچه، تبدیل لاپلاس برای حل مسائل پیچیده مناسب است، اما نیازمند آگاهی از ریاضیات پیشرفته تری است. بنابراین، بحث پیرامون تبدیل لاپلاس را که در فصل ۷ کتاب عنوان شده است را در این درس مطرح نمی نماییم و این فصل را به روش جداسازی متغیرها اختصاص می دهیم. در چهار بخش بعدی، مروری بر روابط ریاضی ضروری برای این روش، خواهیم داشت.

## ۲. مسائل مقدار مرزی، مسائل مقدار مشخصه

در ابتدا یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم که از فرمولاسیون دیفرانسیلی مسأله‌ی هدایت یک بعدی پایا حاصل می‌شود را در نظر بگیرید. جواب این مسأله شامل ۲ ثابت اختیاری است که توسط دو شرط تعیین می‌شوند، که هر کدام از این شرایط در یکی از مرزهای مسأله قرار دارند. به این گونه مسائل، مسائل مقدار مرزی گفته می‌شود و با مسائل مقدار اولیه که در آنها همه‌ی شرایط در یک مکان تعیین شده است، متفاوت می‌باشد. یک مثال از مسأله‌ی مقدار اولیه، سقوط آزاد یک جسم است که در فصل ۱ به آن اشاره شد.

حال یک معادله خطی همگن مرتبه دوم را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0, \quad (7-1)$$

که در مرزهای  $x=a$  و  $x=b$  مقدار تابع  $y$  به صفر می‌رسد:

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (7-2)$$

جواب کلی این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \quad (7-3)$$

که  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  جواب‌های مستقل خطی و  $C_1$  و  $C_2$  ثوابت اختیاری می‌باشند. از ترکیب این جواب با شرایط مرزی داریم:

$$\begin{aligned} C_1y_1(a) + C_2y_2(a) &= 0, \\ C_1y_1(b) + C_2y_2(b) &= 0. \end{aligned} \quad (7-4)$$

یک جواب این معادله‌ی همگن به ازای  $C_1=C_2=0$  بدست می‌آید، که به آن جواب بدیهی  $y=0$  می‌گویند. اگر دترمینان ضرایب  $C_1$  و  $C_2$  غیر صفر باشد، جواب بدیهی تنها جواب است. اگر دترمینان ضرایب صفر باشد، داریم:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0. \quad (7-5)$$

حال دو معادله‌ی (۷-۴) یکسان بوده و یک ثابت را می‌توان به صورت حاصل ضرب دیگری با استفاده از یکی از معادلات بیان نمود، و ثابت دوم اختیاری است. بنابراین اگر معادله‌ی (۷-۵) صادق بوده و با در نظر گرفتن اولیه‌ی معادله‌ی (۷-۴)،  $C_2 y_2(a) = -C_1 y_1(a)$  بدست می‌آید. با تعریف ثابت جدید  $C$  بصورت  $C_1 = C y_2(a)$  معادله‌ی  $C_2 = -C y_1(a)$  بدست می‌آید و معادله (۷-۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$y = C[y_2(a)y_1(x) - y_1(a)y_2(x)]. \quad (۷-۶)$$

به سادگی می‌توان دید که معادله‌ی (۷-۶) در شرایط مرزی صدق می‌کند. یک شرط،  $y(a) = 0$  است که به طور مستقیم از معادله‌ی (۷-۶) حاصل می‌شود و شرط دیگر یعنی  $y(b) = 0$  معادله‌ی (۷-۶) را به  $y_2(a)y_1(b) - y_1(a)y_2(b) = 0$  تبدیل می‌کند، که این عبارت، منفی معادله‌ی (۷-۵) است. شایان ذکر است که معادله‌ی (۷-۶) جواب غیربدیهی است اگر فقط  $y_1(a)$  و  $y_2(a)$  هر دو صفر نباشند. اگر  $y_1(a) = y_2(a) = 0$  باشد، معادله‌ی اول (۷-۴) پاسخ بدیهی خواهد بود، که در این مورد تنها معادله‌ی دوم ممکن است برای بدست آوردن رابطه‌ی بین ثوابت  $C_1$  و  $C_2$  مورد استفاده قرار گیرد. و پاسخ غیربدیهی به صورت زیر خواهد بود:

$$y = C[y_2(b)y_1(x) - y_1(b)y_2(x)],$$

با این شرط که  $y_1(b)$  و  $y_2(b)$  هر دو صفر نیستند. اگر  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  هر دو در نقاط  $x=a$  و  $x=b$  صفر شوند، آنگاه برای مقادیر اختیاری ثوابت  $C_1$  و  $C_2$ ، معادله‌ی (۷-۳) در معادله‌ی (۷-۲) صدق می‌کند. اگر معادله‌ی (۷-۵) صادق نباشد، تنها جواب مسأله، جواب بدیهی یا  $y \equiv 0$  خواهد بود.

جواب مسائل هدایت پایای ۲ و ۳ بعدی، و همچنین پاسخ مسائل ناپایای یک و چند بعدی ممکن است به جواب معادله‌ی (۷-۱) تبدیل شوند، که در معادله‌ی (۷-۱) ضرایب  $f_1(x)$  و یا  $f_2(x)$  به پارامتر  $\lambda$  وابسته هستند.

در چنین مسائلی ممکن است درمیان معادله‌ی (۷-۵) تنها برای مقادیر حقیقی  $\lambda$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ ) به صفر میل کند. این مقادیر، مقادیر مشخصه نامیده می‌شوند. به ازای هر مقدار از  $\lambda$  یک جواب مشابه معادله‌ی (۷-۶) حاصل می‌شود.

این جواب‌های ویژه، توابع مشخصه‌ی مسأله هستند و مسائل این‌چنینی، مسائل مقدار مشخصه نامیده می‌شوند. که در این مورد واژه‌های مقادیر ویژه و توابع ویژه و مسائل مقدار ویژه نیز استفاده می‌شوند.

روند کلی مذکور را می‌توان با استفاده از یک مثال به طور واضح‌تری شرح داد. معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

این معادله در جلسات قبل برای نشان دادن روش سری‌های توانی برای حل معادلات دیفرانسیل، مورد استفاده قرار گرفت. علاوه بر آن فرض می‌کنیم که این معادله‌ی همگن شامل یک پارامتر  $\lambda$  به صورت زیر است:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0, \quad (7-7)$$

و شرایط مرزی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(0) = 0, \quad (7-8)$$

$$y(L) = 0. \quad (7-9)$$

جواب کلی معادله‌ی (7-7) به صورت زیر است:

$$y = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x. \quad (7-10)$$

با استفاده از معادله‌ی (7-8)،  $C_2 = 0$  می‌شود و خواهیم داشت:

$$y = C_1 \sin \lambda x, \quad (7-11)$$

و از ترکیب معادله‌ی (7-9) با معادله‌ی (7-11)، معادله‌ی  $0 = \sin \lambda L$  حاصل می‌شود. تنها اگر  $\lambda$  در معادله  $0 = \sin \lambda L$

صدق کند، معادله دارای جواب غیربدیهی است. بنابراین،

$$\lambda_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7-12)$$

و جواب متناظر با معادله‌ی (۷-۱۱) به صورت زیر است:

$$y = C_1 \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) = \sin(n\pi/L)x. \quad (\text{پ-۳-۷})$$

وقتی که  $n$  دارای مقدار صحیح منفی باشد هیچ جواب جدیدی حاصل نمی‌شود.

بنابراین مسأله‌ی مقدار مرزی مذکور، یعنی معادلات (۷-۷)، (۷-۸) و (۷-۹) تنها دارای جواب بدیهی  $y \equiv 0$  می‌باشند،

مگر اینکه  $\lambda$  دارای مقدار مشخصه‌ای حاصل از معادله‌ی (۷-۱۲) باشد. متناظر با هر مقدار  $\lambda_n$  یک تابع مشخصه  $\varphi_n(x)$

وجود دارد که توسط معادله‌ی (۷-۱۳) حاصل می‌شود. حاصل ضرب هر ثابت دلخواهی در این تابع، جوابی از مسأله

است. نکته‌ی مهم این است که مسأله‌ی مقدار مرزی

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda^2 y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

و  $y(0)=0$  و  $y(L)=0$  به ازای  $\lambda=0$  تنها دارای جواب بدیهی  $y \equiv 0$  است. از این رو برای این مسأله مقادیر مشخصه و

توابع مشخصه وجود نخواهد داشت. این امر این واقعیت را نشان می‌دهد که مسأله‌ی مقدار مرزی ممکن است مسأله‌ی

مقدار مشخصه باشد. وقتی که یک مسأله‌ی مقدار اولیه دارای جوابی با ماهیت متناوب باشد، تبدیل به مسأله‌ی مقدار

مشخصه خواهد شد. دوره‌ی تناوب و میدان نوسان این جواب‌ها ممکن است ثابت و یا متغیر باشد. مثال‌ها دربرگیرنده‌ی

توابع گردشی و توابع بسط نوع اول و دوم با هر درجه‌ای است. از آنجایی که نقطه‌ی آغازین مسأله‌ی مقدار مشخصه یک

مسأله‌ی مقدار مرزی است، معمولاً به مسأله‌ی مقدار مشخصه، مسأله‌ی مقدار اولیه گفته می‌شود.

در سه بخش بعدی ویژگی‌های کلی توابع مشخصه بررسی شده است.

### ۳. تعامد توابع مشخصه

طبق تعریف، دو تابع  $\varphi_n(x)$  و  $\varphi_m(x)$  در یک بازه محدود  $(a,b)$  و با استفاده از تابع وزنی  $w(x)$  متعامد نامیده می‌شوند، اگر انتگرال حاصل ضرب  $w\varphi_n\varphi_m$  در آن بازه صفر باشد و داریم:

$$\int_a^b w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (7-14)$$

علاوه بر آن، دسته‌ای از توابع در بازه‌ی  $(a,b)$  متعامد نامیده می‌شوند اگر هر دو جفت متمایز از این توابع در بازه‌ی  $(a,b)$  متعامد باشند. واژه‌ی تعامد از آنالیز برداری گرفته شده است. می‌خواهیم یک بردار در فضای ۳ بعدی را با  $\varphi_m(x_i)$  نشان دهیم که تصاویر این بردار روی محورهای مختصات  $\varphi_m(x_1)$ ،  $\varphi_m(x_2)$  و  $\varphi_m(x_3)$  است. دو بردار  $\varphi_m(x_i)$  و  $\varphi_n(x_i)$  متعامدند و یا بر هم عمودند اگر داشته باشیم:

$$\varphi_m(x_i) \cdot \varphi_n(x_i) = \sum_{i=1}^3 \varphi_m(x_i)\varphi_n(x_i) = 0.$$

وقتی که واحد طول در محورهای مختصات از یک محور به محور دیگر تغییر کند، حاصل ضرب نرده‌ای مذکور را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$\varphi_m(x_i) \cdot \varphi_n(x_i) = \sum_{i=1}^3 w(x_i)\varphi_m(x_i)\varphi_n(x_i),$$

که تعداد توابع وزنی  $w(x_1)$ ،  $w(x_2)$  و  $w(x_3)$  به واحد طولی مورد استفاده در طول سه محور، بستگی دارد.

به طور مشابه، بردارهای فضای  $N$  بعدی و دارای سازنده‌های  $\varphi_m(x_i)$ ،  $\varphi_n(x_i)$  و  $i=1,2,3,\dots,N$  با استفاده از توابع وزنی  $w(x_i)$  وقتی متعامدند که داشته باشیم:

$$\varphi_m(x_i) \cdot \varphi_n(x_i) = \sum_{i=1}^N w(x_i)\varphi_m(x_i)\varphi_n(x_i) = 0. \quad (7-15)$$



اگر بردار فضایی دارای تعداد نامحدودی بعد باشد،  $\varphi_m(x_i)$  و  $\varphi_n(x_i)$  به طور پیوسته متمایز بوده و  $x_i$  به صورت گسسته نبوده بلکه دارای مقادیر پیوسته است و به آن  $x$  می گویند؛ در این مورد معادله ی (۷-۱۵) با معادله ی (۷-۱۴) یکسان خواهد شد.

اکنون می توانیم نشان دهیم که توابع مشخصه ی یک مسأله ی مقدار مشخصه در یک بازه ی محدود و با استفاده از تابع وزنی متعامدند. برای نشان دادن این واقعیت، مسأله ی مقدار مشخصه شامل معادله ی دیفرانسیل خطی همگن درجه دوم با فرم کلی زیر را در نظر می گیریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x) \frac{dy}{dx} + [f_2(x) + \lambda^2 f_3(x)]y = 0$$

و دو شرط مرزی همگن در دو انتهای بازه ی محدود  $(a, b)$  تعیین می شود. اگر این معادله را در فاکتور  $\exp\left[\int f_1(x) dx\right] = p(x)$  و در تابع  $f_2(x)p(x) = q(x)$  و  $f_3(x)p(x) = w(x)$  ضرب نموده و بازآرایی کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda^2 w(x)]y = 0, \quad (7-16)$$

که این فرم برای بحث حاضر مناسب تر است.

$\lambda_m$  و  $\lambda_n$  مقادیر مشخصه متمایز هستند، که در آنها  $m \neq n$  بوده و  $\varphi_m(x)$  و  $\varphi_n(x)$  متناظر با توابع مشخصه است. از آنجایی که  $y = \varphi_m(x)$  و  $y = \varphi_n(x)$  جواب های معادله ی (۷-۱۶) هستند، داریم:

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_m}{dx} \right) + (q + \lambda_m^2 w) \varphi_m = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_n}{dx} \right) + (q + \lambda_n^2 w) \varphi_n = 0.$$

با ضرب معادله ی اول در  $\varphi_n$  و ضرب معادله ی دوم در  $\varphi_m$ ، سپس تفریق معادله ی دوم از اول خواهیم داشت:

$$\varphi_n \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_m}{dx} \right) - \varphi_m \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_n}{dx} \right) + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) w \varphi_m \varphi_n = 0.$$

با انتگرال گیری از این معادله در بازه ی محدود  $(a, b)$  خواهیم داشت:

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_a^b w \varphi_m \varphi_n dx = \int_a^b \left[ \varphi_n \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_m}{dx} \right) - \varphi_m \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_n}{dx} \right) \right] dx,$$

با انجام انتگرال سمت راست معادله ی بالا خواهیم داشت:

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_a^b w \varphi_m \varphi_n dx = \left\{ p(x) \left[ \varphi_n(x) \frac{d\varphi_m(x)}{dx} - \varphi_m(x) \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \right] \right\} \Big|_a^b. \quad (7-17)$$

از آنجائی که هر دو عبارت  $y = \varphi_m(x)$  و  $y = \varphi_n(x)$  جواب های ویژه ی معادله ی (7-16) هستند، وقتی که یکی از شرایط

مرزی زیر در انتهای بازه ی  $(a, b)$  تعیین شود، سمت راست معادله (7-17) صفر می شود:

$$y = 0, \quad (7-18)$$

$$dy/dx = 0, \quad (7-19)$$

$$dy/dx + By = 0, \quad (7-20)$$

که  $B$  یک پارامتر اختیاری است. در واقع وقتی که معادله ی (7-20) صادق باشد، معادله ی (7-17) صفر خواهد شد که

می توان این حالت را با بازآرایی قسمت سمت راست معادله ی (7-17) و به صورت زیر نشان داد:

$$\varphi_n \varphi_m' - \varphi_m \varphi_n' = \varphi_n \varphi_m' - \varphi_m \varphi_n' \pm B \varphi_m \varphi_n = \varphi_n (\varphi_m' + B \varphi_m) - \varphi_m (\varphi_n' + B \varphi_n).$$

به ویژه وقتی که در  $x=a$  یا  $x=b$   $p(x)=0$  باشد، سمت راست معادله ی (7-17) صفر خواهد شد، که در این صورت

استفاده از شروط داده شده در معادلات (7-18) و (7-19) یا (7-20)، به ازای هر مقدار محدود  $y$  و در هر نقطه، غیر

ضروری است. اگر  $p(b)=p(a)$  باشد، تعامد به شرطی وجود خواهد داشت که شرایط مرزی با شرایط  $y(b)=y(a)$  و

$y'(b)=y'(a)$  جایگزین گردد، که به این شرایط اخیر شرایط مرزی متناوب گفته می شود.

به عنوان یک مثال، مسأله‌ی مقدار مشخصه‌ی ذکر شده در معادلات (۷-۷)، (۷-۸) و (۷-۹) را دوباره در نظر بگیرید. مقایسه‌ای بین معادلات (۷-۷) و (۷-۱۶)،  $w(x)=I$  را حاصل می‌کند و شرط تعامد برای این مسائل به صورت زیر است:

$$\int_0^L \varphi_m(x)\varphi_n(x) dx = \int_0^L \sin(m\pi x/L) \sin(n\pi x/L) dx = 0, \quad m \neq n,$$

که این امر را می‌توان به وسیله‌ی انتگرال‌گیری مستقیم و به طور مستقیم بدست آورد.

### ۵. بسط توابع دلخواه به صورت سری توابع متعامد

فرض کنید  $\varphi_n(x)$  گروهی از توابع متعامد در بازه‌ی محدود  $(a,b)$  و به همراه تابع وزنی  $w(x)$  است. می‌خواهیم تابع دلخواه  $f(x)$  را به شکل یک سری به فرم زیر بسط دهیم و داریم:

$$f(x) = b_0\varphi_0(x) + b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varphi_n(x). \quad (۷-۲۱)$$

با فرض وجود چنین بسطی، می‌توانیم ضرایب  $b_n$  را بدست آوریم. با ضرب دو طرف معادله‌ی (۷-۲۱) در  $w(x)\varphi_m(x)$  و انتگرال‌گیری از نتیجه آن در بازه‌ی  $(a,b)$  و با فرض این که انتگرال یک حاصل جمع نامحدود، معادل مجموع انتگرال باشد، خواهیم داشت:

$$\int_a^b w(x)f(x)\varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_a^b w(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x) dx, \quad (۷-۲۲)$$

که  $\varphi_m(x)$ ،  $m$ مین عبارت در گروه توابع ذکر شده است. با استفاده از تعامد گروه توابع، می‌توانیم در یابیم که همه‌ی عبارات موجود در حاصل جمع در سمت راست معادله‌ی (۷-۲۲) صفر بوده، بجز عبارت متناظر با  $n=m$  از این رو معادله‌ی (۷-۲۲) عبارت زیر را حاصل می‌کند:

$$b_n = \frac{\int_a^b w(x)f(x)\varphi_n(x) dx}{\int_a^b w(x)\varphi_n^2(x) dx}. \quad (۷-۲۳)$$

مسأله‌ی کلی تعیین بسط معادله‌ی (۷-۲۱) که نشان‌دهنده‌ی تابع  $f(x)$  است، خارج از محدوده‌ی این درس است. البته قابل ذکر است که چنین بسط‌هایی کاملاً عمومیت دارند و بر خلاف بسط‌های تیلور و مک‌لورن که نیاز دارد تابع و همه مشتقاتش پیوسته باشند، اگر تابع  $f(x)$  در بازه‌ی محدود  $(a, b)$  یک تابع دیفرانسیل‌پذیر تکه‌ای باشد، در تمام نقاط پیوستگی، سری حاصل از معادله‌ی (۷-۲۱) به تابع  $f(x)$  هم‌گرا است. در بخش بعدی نشان می‌دهیم که سری‌های معروف فوریه، در واقع موارد بخصوصی از بسط‌ها بر حسب توابع متعامد شامل توابع گردشی هستند.

## ۵. سری‌های فوریه

در بخش ۳ آموختیم که مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر است:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

و همچنین آموختیم که مسأله‌ی مقدار مشخصه دارای مقادیر و توابع مشخصه‌ی زیر است:

$$\lambda_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7-12)$$

$$\varphi_n = \sin(n\pi/L)x. \quad (7-13)$$

حال می‌خواهیم یک تابع دلخواه  $f(x)$  را به صورت توابع مشخصه بسط دهیم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi/L)x, \quad 0 < x < L, \quad (7-24)$$

که ضرایب  $b_n$  با استفاده از معادله‌ی (۷-۲۳) بدست می‌آید:

$$b_n = \frac{\int_0^L f(x) \sin(n\pi/L)x \, dx}{\int_0^L \sin^2(n\pi/L)x \, dx}. \quad (7-25)$$

می‌توان به سرعت و با انتگرال‌گیری مستقیم نشان داد که مخرج معادله‌ی (۷-۲۵) بدون توجه به مقدار  $n$  برابر  $\frac{L}{2}$  است.

از این رو داریم:

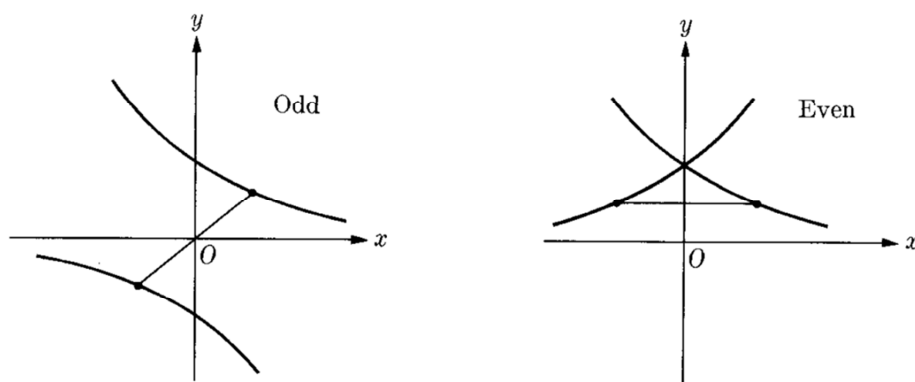
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (۷-۲۶)$$

سری موجود در معادله‌ی (۷-۲۴) تعریف سری سینوس فوریه تابع  $f(x)$  در بازه‌ی  $(0, L)$  است. همه‌ی عبارات این سری با دوره‌ی تناوب  $2L$ ، که دو برابر طول بازه است، متناوب است. اگر  $x$  را با  $-x$  جایگزین کنیم، علامت هر عبارت معکوس می‌شود.

از این رو در بازه‌ی  $(-L, 0)$  سری نشان‌دهنده تابع  $-f(x)$  است. رفتار سری‌ها در بازه‌ی  $(-L, L)$  به صورت تناوبی برای همه‌ی مقادیر  $x$  تکرار می‌شود. اگر  $f(x)$  تابعی فرد از  $x$  باشد، سری بدست آمده از معادله‌ی (۷-۲۴)، تابع  $f(x)$  را تنها در بازه‌ی  $(0, L)$  نشان نمی‌دهند، بلکه این سری نشان‌دهنده‌ی تابع  $f(x)$  در بازه‌ی  $(-L, L)$  است. اگر علاوه بر آن،  $f(x)$  با دوره تناوب  $2L$ ، متناوب باشد، سری‌ها در هر نقطه‌ای  $f(x)$  را نشان می‌دهند.

یک تابع  $f(x)$  تابع فرد نامیده می‌شود اگر  $f(-x) = -f(x)$  باشد و یک تابع زوج است اگر  $f(-x) = f(x)$  باشد.

یک تابع فرد نسبت به مبدأ متقارن است، در حالی که تابع زوج نسبت محور  $y$  متقارن است (شکل ۱).



شکل ۱- تابع زوج و فرد

به عنوان یک مثال سری فوریه‌ی سینوسی، تابع زیر را در بازه‌ی  $(0, L)$  مدنظر قرار می‌دهیم (شکل ۲):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \text{ and } L/2 < x < \infty \\ 1, & 0 < x < L/2 \end{cases} \quad (7-27)$$

ضرایب سری به صورت زیر است:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right);$$

از این رو سری به صورت زیر است:

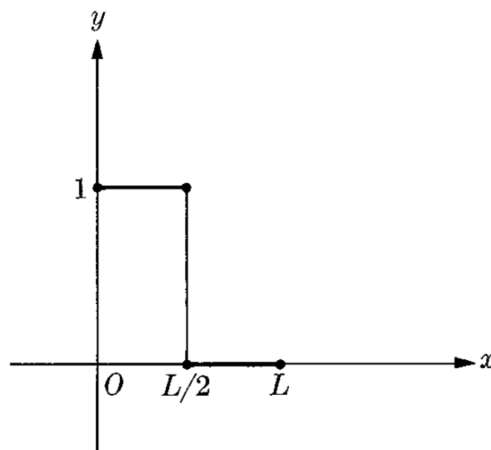
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (7-28)$$

با سری‌های مشابهی می‌توان تابع زیر را در بازه‌ی  $(-L, 0)$  نشان داد (شکل ۳):

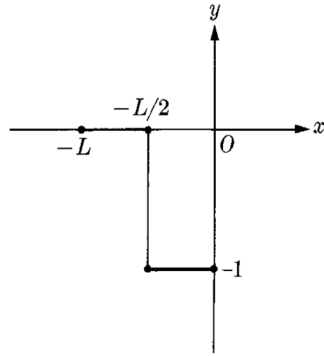
$$-f(x) = f(-x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -L/2 \text{ and } 0 < x < \infty \\ -1, & -L/2 < x < 0 \end{cases}$$

بنابراین سری فوریه‌ی سینوسی تابع فرد به صورت زیر تعریف می‌شود:

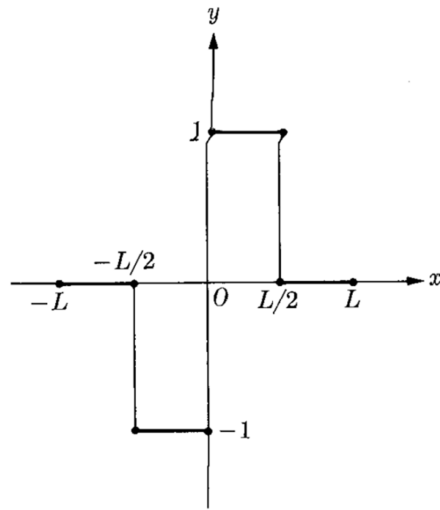
$$f(x) = \begin{cases} -1, & -L/2 < x < 0 \\ 0, & -\infty < x < L/2 \text{ and } L/2 < x < \infty \\ 1, & 0 < x < L/2 \end{cases}$$



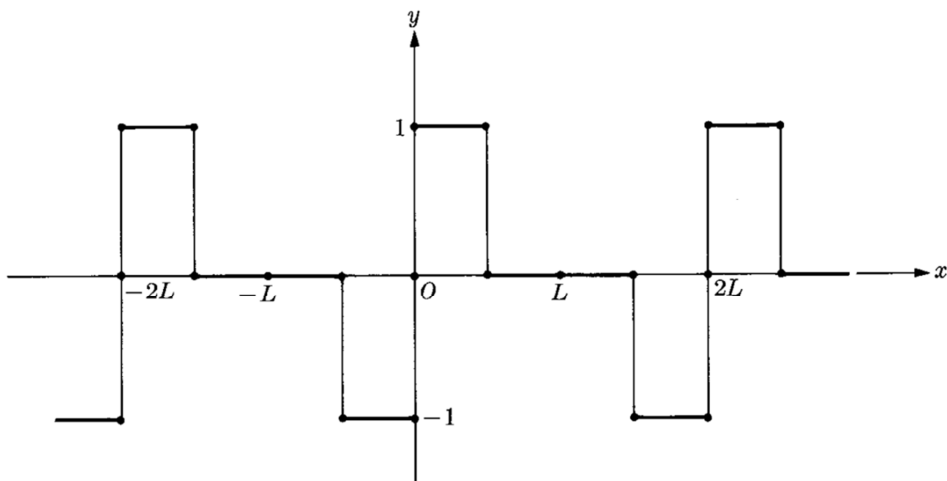
شکل ۲- سری فوریه‌ی سینوسی تابع ۷-۲۷



شکل ۳- سری فوریه‌ی سینوسی تابع زوج



شکل ۴- سری فوریه‌ی سینوسی تابع فرد



شکل ۵- سری فوریه‌ی سینوسی تابع فرد

که عبارت بالا تابع  $f(x)$  را در بازه  $(-L, L)$  (شکل ۴) بجز در نقاط ناپیوستگی نشان می‌دهد و رفتار متناوب را به ازای همه‌ی مقادیر  $x$  (شکل ۵) تکرار می‌کند.

بسط سری شامل کسینوس به جای سینوس ممکن است با در نظر گرفتن مسأله‌ی مقدار مرزی زیر حاصل شود:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0; \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0. \quad (7-29)$$

بر طبق روند مسأله‌ی مقدار مشخصه‌ی قبلی، می‌توانیم به سادگی مقادیر مشخصه و توابع مشخصه را به فرم زیر بدست آوریم:

$$\lambda_n = n\pi/L, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \varphi_n = \cos(n\pi/L)x. \quad (7-30)$$

شایان ذکر است که  $\varphi_0(x) = I$  یکی از اعضای گروه توابع مشخصه در معادله‌ی (۷-۳۰) و متناظر با  $\lambda_0 = 0$  است. اکنون با بسط یک تابع دلخواه  $f(x)$  بر حسب سری مذکور، خواهیم داشت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi/L)x, \quad 0 < x < L, \quad (7-31)$$

که ضرایب  $a_n$  با استفاده از معادله‌ی (۷-۲۳) و به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$$a_0 = \frac{\int_0^L f(x) dx}{\int_0^L dx}, \quad a_n = \frac{\int_0^L f(x) \cos(n\pi/L)x dx}{\int_0^L \cos^2(n\pi/L)x dx}. \quad (7-32)$$

علاوه بر آن می‌توان نوشت:

$$\int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)x dx = \begin{cases} L, & n = 0 \\ L/2, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

با بازآرایی معادله‌ی (۷-۳۲) خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x dx. \quad (7-33)$$





مهندسان شیمی تهران

www.ChemEng.ir

### مشاوره و پشتیبانی

مشاوره پشتیبانی ۲۴ ساعته

از طریق سایت و تلگرام



فایل های تصویری

تولید محتوای تصویری  
آموزشی مهندسی

دوره های آموزشی

برگزاری دوره های  
تخصصی مهندسی شیمی  
به صورت حضوری و مجازی



جزوات و کتاب های اختصاصی

ارائه جزوات، کتاب ها و نرم افزارهای  
تخصصی مهندسی شیمی



info@ChemEng.ir



021-36601980 , 0935-5930404



<https://telegram.me/chemicalengineering>



<https://www.instagram.com/chemeng.ir>

سری بدست آمده در معادله‌ی (۷-۳۱) تعریف سری فوریه‌ی کسینوسی تابع  $f(x)$  در بازه‌ی  $(0, L)$  است. همه عبارات معادله‌ی (۷-۳۱) توابعی زوج از  $x$  هستند و با دوره‌ی تناوب  $2L$ ، متناوب می‌باشند. این سری‌ها نشان‌دهنده‌ی تابع  $f(-x)$  در بازه  $(-L, 0)$  می‌باشند. اگر  $f(x)$  تابع فردی از  $x$  باشد، سری نه تنها به ازای بازه  $(0, L)$  به  $f(x)$  هم‌گراست، بلکه به ازای بازه  $(-L, 0)$  نیز به  $f(x)$  هم‌گراست. اگر علاوه بر آن،  $f(x)$  تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب  $2L$  باشد، سری در هر نقطه‌ای نشان‌دهنده‌ی تابع  $f(x)$  است.

اکنون سری فوریه‌ی کسینوسی مثال قبلی یعنی معادله‌ی (۷-۲۷) را در نظر بگیرید. ضرایب سری به صورت زیر است:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} 1 \cdot dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (۷-۳۴)$$

با سری‌های مشابهی می‌توان تابع زیر را در بازه‌ی  $(-L, 0)$  نشان داد (شکل ۶):

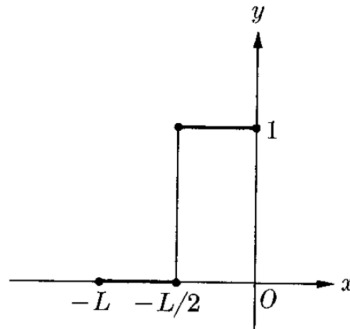
$$f(x) = f(-x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -L/2 \text{ and } 0 < x < \infty \\ -1, & -L/2 < x < 0 \end{cases}$$

بنابراین سری فوریه‌ی کسینوسی تابع زوج به صورت زیر تعریف می‌شود:

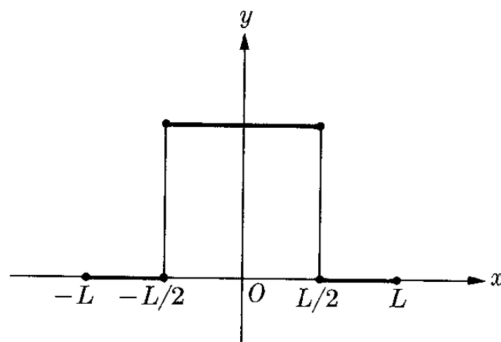
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -L/2 \text{ and } L/2 < x < \infty \\ 1, & -L/2 < x < L/2 \end{cases}$$

که عبارت بالا تابع  $f(x)$  را در بازه‌ی  $(-L, L)$  (شکل ۷) بجز در نقاط ناپیوستگی نشان می‌دهد و رفتار متناوب را به ازای همه‌ی مقادیر  $x$  (شکل ۸) تکرار می‌کند.

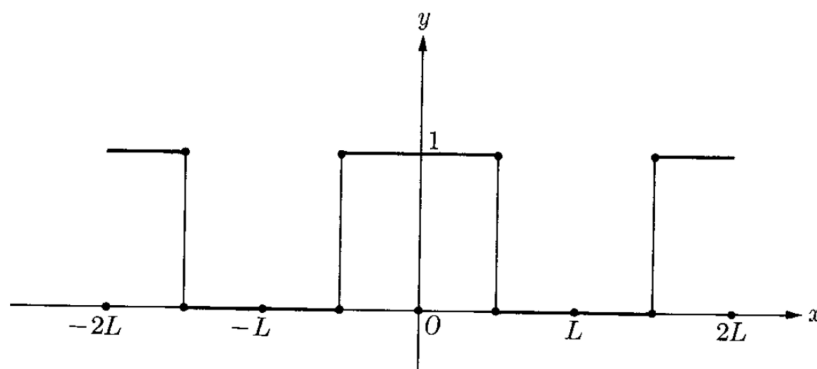
بنابراین می توان دید که هر تابع پیوسته‌ی تکه‌ای را می توان در بازه‌ی  $(0, L)$  با سری‌هایی شامل سینوس و کسینوس و با دوره‌ی تناوب  $2L$  بیان نمود. وقتی که تابع فرد باشد، سری‌های سینوس در بازه‌ی  $(-L, L)$  معتبرند، در حالیکه برای یک تابع زوج سری‌های کسینوسی در یک بازه‌ی یکسان قرار می گیرند.



شکل ۶- سری فوریه کسینوسی



شکل ۷- سری فوریه کسینوسی



شکل ۸- سری فوریه کسینوسی

حال می‌خواهیم تابع  $f(x)$  پیوسته‌ی تکه‌ای را در بازه‌ی  $(-L, L)$  بر حسب هر دو عبارت سینوسی و کسینوسی دارای دوره تناوب  $2L$ ، بیان کنیم. می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

که تابع درون کروشیه‌ی اول، زوج بوده و درون کروشیه‌ی دوم، فرد است. می‌توانیم به این واقعیت توجه کنیم که یک تابع دلخواه را می‌توان بر حسب مجموع توابع زوج و توابع فرد بیان نمود. از این رو:

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x). \quad (7-35)$$

با بیان تابع  $f(x)$  بر حسب کسینوس و  $f_o(x)$  بر حسب سینوس در بازه‌ی  $(-L, L)$  خواهیم داشت:

$$f_e(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi/L)x, \quad (7-36)$$

$$f_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi/L)x, \quad (7-37)$$

که:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f_e(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_e(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x dx,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_o(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x dx.$$

از آنجایی که انتگرال‌گیری از این معادلات توابع زوجی از  $x$  را حاصل می‌کند،  $\frac{1}{2} \int_{-L}^L$  را جایگزین  $\int_0^L$  می‌کنیم:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x dx. \quad (7-38)$$

واضح است که بخش فرد دو انتگرال اول و بخش زوج انتگرال، خود به طور یکسان صفر می‌شود. از این رو با قرار دادن

معادله‌ی (7-36) و (7-37) درون معادله‌ی (7-35) خواهیم داشت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi/L)x + b_n \sin(n\pi/L)x], \quad -L < x < L. \quad (7-39)$$

این سری تعریف سری فوریه‌ی کامل تابع  $f(x)$  در بازه‌ی  $(-L, L)$  است. وقتی  $f(x)$  زوج باشد، سری حاصل تنها شامل عبارت کسینوسی است، و وقتی که  $f(x)$  فرد باشد، سری حاصل تنها شامل عبارت سینوسی است. علاوه بر آن معادله‌ی (7-39) بر حسب هر دو تابع سینوس و کسینوس با دوره‌ی تناوب  $2L$  و در بازه‌ی  $(-L, L)$  است و این رفتار به صورت تناوبی به ازای همه‌ی مقادیر  $x$  تکرار می‌شود.

در آخر می‌خواهیم سری فوریه‌ی کامل معادله‌ی (7-27) را بدست آوریم. ضرایب این سری‌های عبارتند از:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2L} \int_0^{L/2} 1 \cdot dx = \frac{1}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{n\pi} \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

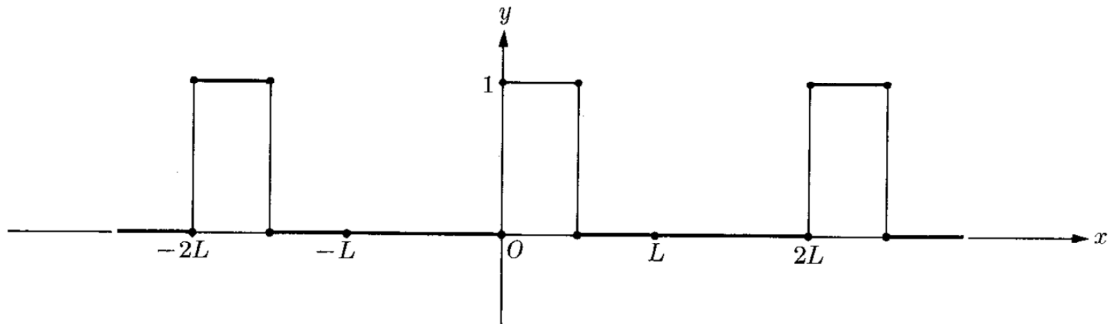
بنابراین:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \quad (7-40)$$

که این تابع به ازای همه مقادیر  $x$  هم‌گراست و یک تابع متناوب است که در شکل ۹ نشان داده شده است.

[معادله‌ی (40) را با مجموع بسط سری‌های سینوسی و کسینوسی توابع مشابه که در شکل‌های ۵ و ۸ و یا معادلات (28)-

(7) و (7-34) به صورت جبری داده شده‌اند، مقایسه نمایید.]



شکل ۹- سری فوریه کامل

## ۶. خلاصه (جمع بندی)

مباحث قبلی مان به مسائل یک بعدی پایا محدود می شد. بطور کلی از آنجاییکه اینگونه مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حاصل می کنند، معمولاً قابل حل می باشند. به عبارت دیگر، مسائل پایای دو و سه بعدی و مسائل ناپایا، معادلات دیفرانسیل پاره ای را حاصل می کنند، که هیچ راه حل کلی برای آنها وجود ندارد. در اینجلسه و جلسات بعد، چندین روش برای حل دقیق این مسائل ارائه شده است.

وقتی که مرزهاییک مسأله، هدایت چند بعدی متناظر با سطوح مختصات در یک سیستم مختصات متعامد مثل مختصات های کارتیزین، استوانه ای، یا کروی باشد، یک راه دقیق توسط روش های تحلیلی امکان پذیر خواهد بود. یک روش متداول بر اساس جداسازی متغیرها، و دیگری بر اساس تبدیل لاپلاس می باشد. دلایل متقاعد کننده ای وجود دارد که نشان می دهند این دو روش متداول تر، برای حل مسائل ویژه مناسب ترند؛ اگرچه، تبدیل لاپلاس برای حل مسائل پیچیده مناسب است، اما نیازمند آگاهی از ریاضیات پیشرفته تری است. بنابراین، بحث پیرامون تبدیل لاپلاس را که در فصل ۷ کتاب عنوان شده است را در این درس مطرح نمی نماییم و این فصل را به روش جداسازی متغیرها اختصاص می دهیم. در این جلسه مروری بر روابط ریاضی ضروری برای این روش داشتیم.

**۸. فهرست منابع**

1. Conduction Heat Transfer, By: V. S. Arpachi, Addison – Wesley, 1966, 1991.
2. Heat Conduction, By: S. Kakas, Y. Yener, Taylor & Francis, 1993.
۳. انتقال حرارت هدایتی، نویسنده: آرپاچی، مترجمان: غفاربرهانی، رضایی منش و جدیدی.



انتقال حرارت پیشرفته

جلسه هشتم

حل معادلات پایای دو بعدی در مختصات کارتزین + مثال های حل شده

فهرست مطالب

۲	مقدمه
۲	۳- جداسازی متغیرها، معادلات پایای دو بعدی در مختصات کارتزین
۴	مثال ۱
۹	مثال ۲
۱۱	مثال ۳
۱۴	مثال ۴
۱۵	مثال ۵
۱۷	مثال ۶
۲۴	مثال ۷
۳۱	۴- انتخاب محورهای مختصات
۳۱	مثال ۸
۳۵	۵- ناهمگنی
۳۵	مثال ۹
۳۷	مثال ۱۰
۳۹	مثال ۱۱
۴۵	۶- خلاصه (جمع بندی)
۴۵	۶- فهرست منابع



مهندسان شیمی تهران

www.ChemEng.ir

### مشاوره و پشتیبانی

مشاوره پشتیبانی ۲۴ ساعته

از طریق سایت و تلگرام



فایل های تصویری

تولید محتوای تصویری  
آموزشی مهندسی

دوره های آموزشی

برگزاری دوره های  
تخصصی مهندسی شیمی  
به صورت حضوری و مجازی



جزوات و کتاب های اختصاصی

ارائه جزوات، کتاب ها و نرم افزارهای  
تخصصی مهندسی شیمی



info@ChemEng.ir



021-36601980 , 0935-5930404



<https://telegram.me/chemicalengineering>



<https://www.instagram.com/chemeng.ir>

## بسم الله الرحمن الرحيم

با توجه به ریاضیات ارائه شده در جلسه قبل، حال می‌خواهیم جواب مسأله را با استفاده از روش جداسازی

متغیرها بدست آوریم.

### ۱. مقدمه

مباحث قبلی مان به مسائل یک بعدی پایا محدود می‌شد. بطور کلی از آنجاییکه اینگونه مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حاصل می‌کنند، معمولاً قابل حل می‌باشند. به عبارت دیگر، مسائل پایای دو و سه بعدی و مسائل ناپایا، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را حاصل می‌کنند، که هیچ راه حل کلی برای آنها وجود ندارد. در این جلسه و جلسات بعد، چندین روش برای حل دقیق این مسائل ارائه شده است.

وقتی که مرزهای یک مسأله، هدایت چند بعدی متناظر با سطوح مختصات در یک سیستم مختصات متعامد مثل مختصات‌های کارتزین، استوانه‌ای، یا کروی باشد، یک راه دقیق توسط روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. یک روش متداول بر اساس جداسازی متغیرها، و دیگری بر اساس تبدیل لاپلاس می‌باشد. دلایل متقاعدکننده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهند این دو روش متداول‌تر، برای حل مسائل ویژه مناسب‌ترند؛ اگرچه، تبدیل لاپلاس برای حل مسائل پیچیده مناسب است، اما نیازمند آگاهی از ریاضیات پیشرفته‌تری است. بنابراین، بحث پیرامون تبدیل لاپلاس را که در فصل ۷ کتاب عنوان شده است را در این درس مطرح نمی‌نماییم و این فصل را به روش جداسازی متغیرها اختصاص می‌دهیم. در این جلسه به کمک روش جداسازی متغیرها، معادلات پایای دو بعدی در مختصات کارتزین را حل می‌نماییم.

### ۲- جداسازی متغیرها، معادلات پایای دو بعدی در مختصات کارتزین

وقتی که شرایط مرزی مسأله بر حسب عبارت  $T$  و  $\frac{\partial T}{\partial n}$  یا  $BT + \frac{\partial T}{\partial n}$  باشد که  $n$  جهت نرمال شرط

مرزی و  $B$  یک ثابت است، ممکن است جواب را به صورت حاصلضرب توابعی از مختصات‌های جداگانه بیان

کنیم. این کار، این امکان را می‌دهد که شرایط مرزی را بر حسب متغیرهای جداگانه بیان کرده و همچنین معادله دیفرانسیل پاره‌ای به تعدادی مسأله دیفرانسیل معمولی تبدیل گردد. حال خصوصیات اساسی روش را با استفاده از مسأله پایای دو بعدی بیان می‌کنیم. معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_2(x) \frac{\partial T}{\partial x} + a_3(x)T + b_1(y) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + b_2(y) \frac{\partial T}{\partial y} + b_3(y)T = 0. \quad (41)$$

یک فرم کلی این معادله که شامل ضرایبی است که این ضرایب تابعی از هر دو متغیر مستقل است، برای جداسازی متغیرها مناسب نمی‌باشد. فرض کنید حاصلضرب جواب به صورت زیر باشد:

$$T(x, y) = X(x)Y(y), \quad (42)$$

که  $X$  تنها تابعی از  $x$  و  $Y$  تنها تابعی از  $y$  است. این فرض هنگامیکه  $x$  و  $y$  هر یک در معادله دیفرانسیل جداگانه‌ای صدق کنند، بسیار فرض مناسب و پرمعنایی خواهد بود.

با قرار دادن معادله (42) درون معادله (41) و تقسیم نتیجه آن بر  $XY$  خواهیم داشت:

$$\left[ a_1(x) \frac{d^2 X}{dx^2} + a_2(x) \frac{dX}{dx} + a_3 X \right] \frac{1}{X} = - \left[ b_1(y) \frac{d^2 Y}{dy^2} + b_2(y) \frac{dY}{dy} + b_3(y) Y \right] \frac{1}{Y}. \quad (43)$$

سمت چپ این معادله از  $y$  مستقل بوده و سمت راست آن مستقل از  $x$  است. از آنجاییکه  $x$  و  $y$  به طور مستقل تغییر می‌کنند، هر دو سمت معادله (43) از یکی از متغیرها مستقل است و باید دو طرف معادله برابر یک ثابت  $\lambda^2$  یا  $-\lambda^2$  باشد. این ثابت پارامتر جداسازی نامیده می‌شود. از اینرو معادله دیفرانسیل پاره‌ای (41) به دو معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌شود:

$$a_1(x) \frac{d^2 X}{dx^2} + a_2(x) \frac{dX}{dx} + [a_3(x) \pm \lambda^2] X = 0,$$

$$b_1(y) \frac{d^2 Y}{dy^2} + b_2(y) \frac{dY}{dy} + [b_3(y) \mp \lambda^2] Y = 0. \quad (44)$$

روش جداسازی متغیرها را وقتی می‌توان برای مسائل پایای ۲ بعدی مورد استفاده قرار داد، وقتیکه داشته

باشیم:

(الف) یکی از جهت‌های مسأله با معادله دیفرانسیل همگن که دارای شرایط مرزی همگن است (جهت

همگن)، بیان شده، در حالیکه جهت دیگر با معادله دیفرانسیل همگن که دارای یک شرط مرزی همگن و یک

شرط مرزی ناهمگن است (جهت ناهمگن)، بیان می‌شود.

(ب) علامت  $\lambda^2$  به صورتی انتخاب می‌شود که مسأله مقدار مرزی جهت همگن، منجر به مسأله مقدار

مشخصه شود (یعنی علامت  $\lambda^2$  را مخالف علامت جهت همگن مسأله انتخاب می‌کنیم).

جواب‌های حاصل از روش جداسازی متغیرها، به صورت مجموع یا انتگرالی است و به ترتیب به محدود

بودن یا نامحدود بودن جهت همگن بستگی دارد. این فصل و فصل آینده را به روش سری که برای حل مسائل

همگن با دامنه محدود کاربرد دارند، اختصاص می‌دهیم. مناسب است مسائلی که در حوزه مسائل همگن با دامنه

نامحدود قرار می‌گیرند را توسط روش‌های انتگرالی حل نماییم. البته می‌توان این مسائل را با استفاده از روش

تبدیل لاپلاس حل نمود که فصل ۷ کتاب به این مطلب اختصاص دارد.

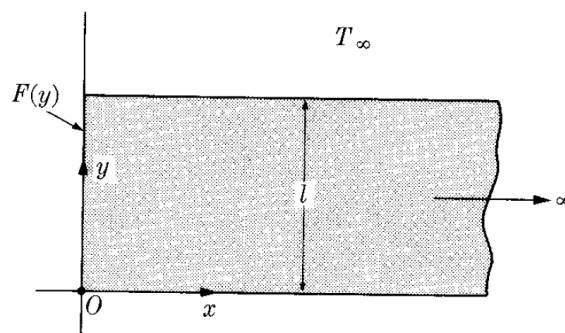
نتایج حاصل از این بخش را می‌توان به سادگی برای مسائل سه بعدی و مسائل ناپایا بسط داد. حال

می‌خواهیم روش جداسازی متغیرها را با تعدادی مثال بیان کنیم.

## ۲-۱ مثال ۱

یک پره نامحدود دو بعدی با ضخامت  $l$  را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰). دمای پایه پره  $F(y)$  و دمای

محیط  $T_\infty$  است. ضریب انتقال حرارت بزرگ است. می‌خواهیم دمای پایای پره را بدست آوریم.



شکل ۱۰

فرمولاسیون دیفرانسیلی مسأله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0,$$

$$T(0, y) = F(y), \quad T(\infty, y) = T_\infty,$$

$$T(x, 0) = T_\infty, \quad T(x, l) = T_\infty.$$

حال می‌خواهیم جواب حاصل از روش جداسازی متغیرها را بدست آوریم، که برای این امر لازم است که

معادله دیفرانسیل و ۳ شرط مرزی همگن باشد. اگر چه با بیان مسأله بر حسب متغیر  $T$  این شرایط را ایجاد

نخواهد شد، بنابراین با تبدیل ساده زیر داریم:

$$\theta = T - T_\infty$$

با این تغییر متغیر، بدون اثرگذاری بر همگنی معادله دیفرانسیل، سه شرط از شرایط مرزی همگن می‌شود.

بنابراین فرمولاسیون مسأله بر حسب  $\theta$  به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad (45)$$

$$\theta(0, y) = F(y) - T_\infty = f(y), \quad (46)$$

$$\theta(\infty, y) = 0,$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad (47)$$

$$\theta(x, l) = 0. \quad (48)$$

$$(49)$$

حال فرض می‌کنیم حاصلضرب جواب به صورت زیر باشد:

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y), \quad (50)$$

سپس با قرار دادن معادله (۵۰) درون معادله (۴۵) و تقسیم نتیجه بر  $XY$  خواهیم داشت:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \pm \lambda^2. \quad (51)$$

در اینجا علامت  $\lambda^2$  باید به گونه‌ای انتخاب شود که در مسأله مقدار مشخصه، جهت  $y$  همگن باشد. با انتخاب  $\lambda^2$ ، جواب ویژه در جهت  $y$  به صورت توابع هیپربولیک بیان می‌شود که همانطور که در بخش ۲ اشاره شد، این گونه توابع نمی‌توانند متعامد باشند؛ از اینرو برای مسأله ما  $\lambda^2 +$  مناسب خواهد بود.

علاوه بر آن استفاده از معادله (۵۰) شرایط مرزی همگن دو بعدی مسأله را به شرایط یک بعدی تبدیل می‌کند. این امر ممکن است به سادگی توسط یکی از شرایط بیان شود که آن شرط معادله (۴۷) است. بنابراین از آنجایی که  $Y(y)$  اختیاری و دلخواه است،  $\theta(\infty, y) = X(\infty)Y(y)$  نشان می‌دهد که باید  $X(\infty) = 0$  باشد. سرانجام، مسأله را به صورت جداگانه در جهات  $x$  و  $y$  به صورت زیر بیان خواهیم نمود:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad Y(0) = 0, \quad Y(l) = 0, \quad (52)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (53)$$

شرط مرزی ناهمگن در جهت  $x$  جدایی ناپذیر است، و برای مرحله آخر راه حل، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مسأله مقدار مشخصه معادله (۵۲) قبلاً در بخش ۲ حل شده است (معادلات ۷ تا ۱۳ را ببینید). توابع مشخصه حاصل  $\varphi_n(y) = C_1 \sin \lambda_n y$  و مقادیر مشخصه  $\lambda = n\pi/l$ ،  $n=1,2,3,\dots$  می‌باشد. بنابراین جواب معادله (۵۲) به صورت  $Y_n(y) = C_n \varphi_n(y)$  است که در آن  $C_n$  یک ثابت اختیاری است. به عبارت دیگر، جواب کلی معادله (۵۳) به شکل مناسبی بر حسب توابع نمایی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n x}, \quad (54)$$

که  $B_n$  یک ثابت اختیاری است.

بنابراین، با استفاده از معادله (۵۰)، جواب حاصلضرب مسأله به صورت زیر است:

$$\theta(x, y) = a_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y, \quad (55)$$

که  $B_n C_n$  همواره به صورت یک حاصلضرب بوده و به مقدار ویژه  $n$  بستگی دارد و با  $a_n$  نشان داده می شود.

اکنون باید تعیین کنیم که کدام مقدار  $n$  باید در معادله (۵۵) برای حل مسأله، استفاده شود. به طور واضح،

معادله (۵۵) در معادله دیفرانسیل (۴۵)، و شرایط مرزی همگن یعنی معادلات (۴۷)، (۴۸) و (۴۹) برای همه

مقادیر مثبت عدد صحیح صادق می باشد. به عبارت دیگر، شرط مرزی ناهمگن، معادله (۴۶) با معادله (۵۵)

ترکیب شده و داریم:

$$f(y) = a_n \sin \lambda_n y,$$

که به طور کلی ممکن است این رابطه به ازای مقادیر منفرد  $n$  صادق نباشد. اگر چه با استفاده از خطی بودن

مسأله و استفاده از اصل جمع پذیری می توان بر این مشکل غلبه نمود. از اینرو، بر حسب تمام مقادیر مثبت  $n$

جواب را می توان به فرم زیر نوشت:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y \quad (56)$$

بنابراین شرط ناهمگن استفاده شده در معادله (۵۶) بسط زیر را حاصل می کند:

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n y, \quad (57)$$

شایان ذکر است که در اینجا تابع وزنی واحد است و می توانیم مقادیر  $a_n$  را با استفاده از معادله (۲۳) بدست

آوریم. نتیجه به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{\int_0^l f(y) \sin \lambda_n y \, dy}{\int_0^l \sin^2 \lambda_n y \, dy}. \quad (58)$$

مخرج معادله (۵۸) برای مقادیر صحیح  $n$  برابر  $l/2$  است. از اینرو معادله (۵۸) به صورت زیر خواهد بود:



(۵۹)

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \lambda_n y dy.$$

سرانجام، با قرار دادن معادله (۵۹) درون معادله (۵۶) می‌توانیم جواب مسأله را به صورت زیر بدست

آوریم:

$$\theta(x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^l f(\eta) \sin \lambda_n \eta d\eta \right] e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y, \quad (60)$$

که متغیر  $y$  در معادله (۵۹) با متغیر  $\eta$  جایگزین شده است.

به ویژه اگر دمای اولیه یکنواخت باشد، یعنی:

$$\theta(0, y) = f(y) = \theta_0,$$

در نتیجه معادله (۵۹) به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2\theta_0}{\lambda_n l} [1 - (-1)^n]. \quad (61)$$

بنابراین اگر معادله (۶۱) را درون معادله (۵۶) قرار دهیم، جواب مسأله بر اساس دمای ثابت پایه به صورت زیر

خواهد بود:

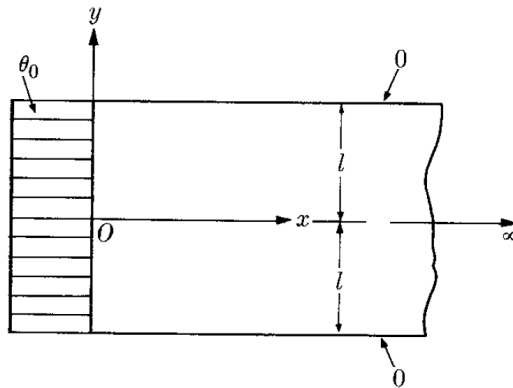
$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y. \quad (62)$$

از آنجاییکه تنها مقادیر فرد صحیح از  $n$  برای دما صادقند، با تعریف عدد صحیح  $k$  به صورت  $n=2k+1$  و

استفاده از  $\lambda_n = n\pi/l$  می‌توانیم معادله (۶۲) را به صورت مناسب‌تر زیر بنویسیم:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)(\pi/l)x}}{(2k+1)} \sin (2k+1) \frac{\pi}{l} y, \quad (63)$$

که همه مقادیر مثبت صحیح و صفر را در برمی‌گیرد.



شکل ۱۱

## ۲-۲-۲- مثال ۲

برای نشان دادن اثر انتخاب مبدأ مختصات بر مسأله، می‌خواهیم جواب مثال ۱ را در یک مبدأ مختصات جدید (شکل ۱۱) برای مورد دمای یکنواخت  $\theta_0$  در پایه بدست آوریم.

تقارن دمایی مسأله با توجه به طول جدید تعریف شده در مسأله، موجب استفاده از  $2l$  به عنوان ضخامت پره می‌شود. فرمولاسیون مسأله بر حسب  $\theta$  به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0,$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad \text{or} \quad \theta(x, -l) = 0,$$

$$\theta(x, l) = 0.$$

با استفاده از جواب حاصلضرب معادله (۵۰) و  $\lambda^2 +$ ، معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی سیستم به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y &= 0; & \frac{dY(0)}{dy} &= 0, & Y(l) &= 0, \\ \frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X &= 0; & X(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (64)$$

(۵۳)

در اینجا شرط تقارن وسط صفحه در جهت  $y$ ، مناسب‌تر بوده و ترجیح داده می‌شود.

جواب مسأله مقدار مشخصه در جهت  $y$  با استفاده از معادله (۶۴) به صورت زیر است:

$$Y_n(y) = C_n \varphi_n(y) \quad (65)$$

و داریم:

$$\varphi_n(y) = \cos \lambda_n y, \quad (66) \text{ توابع مشخصه}$$

$$\lambda_n = (2n + 1)\pi/2l, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (67) \text{ مقادیر مشخصه}$$

که  $C_n$  یک ثابت دلخواه است.

جواب مسأله مقدار مرزی در جهت  $x$ ، مشابه مسأله پیش، معادله (۵۳) است:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n x}. \quad (54)$$

بنابراین جواب حاصلضرب معادله (۵۰) و ترکیب آن با معادلات (۵۴)، (۶۵)، (۶۶) و (۶۷) نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y, \quad (68)$$

که در این معادله دوباره  $a_n = B_n C_n$  است.

سرانجام با استفاده از شرط مرزی ناهمگن داده شده  $\theta(0, y) = \theta_0$ ، می‌توان معادله (۶۸) را به معادله زیر تبدیل نمود:

$$\theta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y. \quad (۶۹)$$

سپس مثل قبل، با استفاده از معادله (۲۳) خواهیم داشت:

$$a_n = (-1)^n \frac{2\theta_0}{\lambda_n l}. \quad (۷۰)$$

بنابراین، با قرار دادن معادله (۷۰) درون معادله (۶۸)، جواب مسأله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\lambda_n x}}{\lambda_n} \cos \lambda_n y. \quad (۷۱)$$

معادلات (۶۳) و (۷۱) نشان‌دهنده دمای یکسان در دو سیستم مختصات مختلف است. بجز در مسائل بدیهی، انتخاب مبدأ مختصات بسیار مهم بوده و در اولین مرحله روش حل باید انتخاب شود. این نکته در بخش ۷ شرح داده شده است.

### ۲-۳-۳ مثال ۳

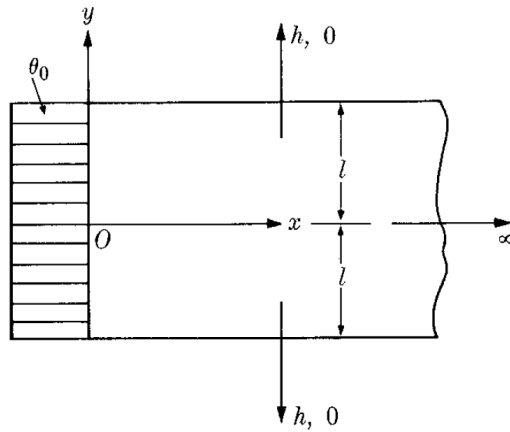
توزیع دمای سطح گسترش یافته مثال ۲ را برای ضریب انتقال حرارت محدود  $h$  (شکل ۱۲) بدست آورید. در این مورد فرمولاسیون مسأله بر حسب مختصات سیستم مسأله ۲ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0,$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad -k \frac{\partial \theta(x, l)}{\partial y} = h\theta(x, l).$$

جواب حاصلضرب داده شده توسط معادله (۵۰) فرمولاسیون مسأله را به روابط زیر تبدیل می‌کند:



شکل ۱۲

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad -k \frac{dY(l)}{dy} = hY(l), \quad (72)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (53)$$

مسأله مقدار مشخصه در جهت  $y$ ، معادله (۷۲) دارای جواب زیر است:

$$Y_n(y) = C_n \varphi_n(y), \quad (73)$$

با

$$\varphi_n(y) = \cos \lambda_n y, \quad (74) \text{ توابع مشخصه}$$

که مقادیر مشخصه، ریشه‌های معادله غیر جبری زیر است:

$$k\lambda_n \sin \lambda_n l = h \cos \lambda_n l. \quad (75)$$

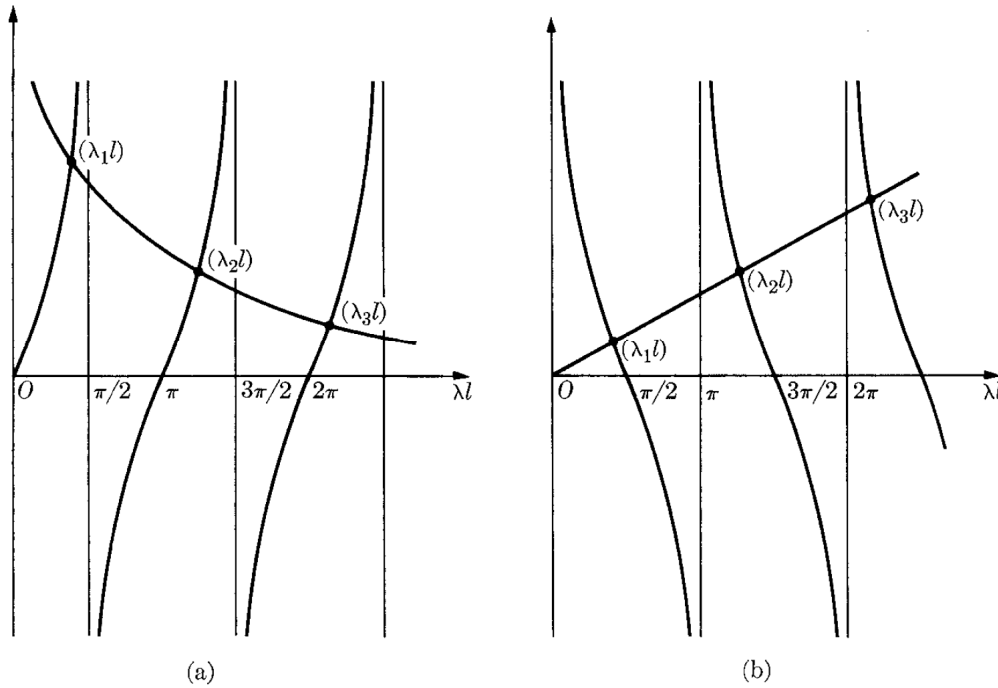
معادله (۷۵) را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر بازآرایی نمود:

$$\tan \lambda_n l = \text{Bi}/\lambda_n l, \quad \cot \lambda_n l = \lambda_n l/\text{Bi}; \quad \text{Bi} = hl/k,$$

که به صورت گرافیکی در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

مسأله مقدار مرزی در جهت  $x$  مانند مثال ۱ و ۲ است؛ از اینرو:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n x},$$



(۵۴)

شکل ۱۳

و جواب حاصلضرب مسأله به صورت زیر است:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y. \quad (۷۶)$$

با استفاده از شرط مرزی ناهمگن باقیمانده، خواهیم داشت:

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y, \quad (۷۷)$$

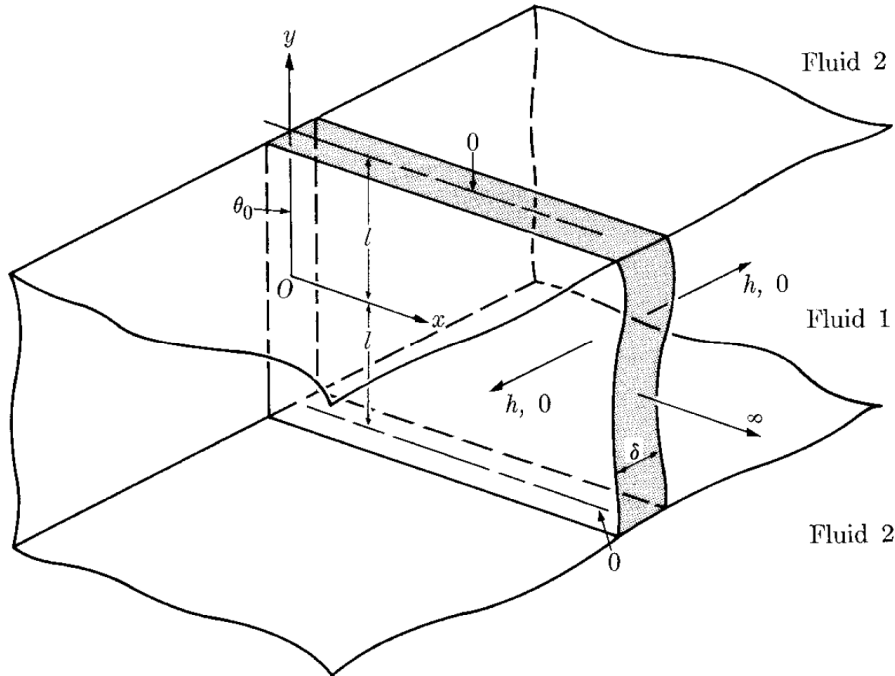
که مقدار  $a_n$  با استفاده از معادله (۷۳) به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2\theta_0 \sin \lambda_n l}{\lambda_n l + \sin \lambda_n l \cos \lambda_n l}. \quad (۷۸)$$

با قرار دادن معادله (۷۸) درون معادله (۷۶)، توزیع دمای مسأله به صورت زیر است:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \lambda_n l}{\lambda_n l + \sin \lambda_n l \cos \lambda_n l} \right) e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y. \quad (79)$$

[اگر  $h \rightarrow \infty$ ، آنگاه در معادله (۷۰) چه اتفاقی می افتد؟]



شکل ۱۴

## ۴-۲-۴ مثال ۴

فرض می شود سطح گسترش یافته مثال ۲، صفحه ای با ضخامت  $\sigma$  و عرض  $2L$  است (شکل ۱۴). ضریب انتقال حرارت عمودی بزرگ بوده و ضریب انتقال حرارت افقی دارای مقدار متوسط  $h$  است. توزیع دما در طول ضخامت  $\sigma$  قابل صرف نظر است. می خواهیم دمای پایای صفحه را بدست آوریم.

فرمولاسیون مسأله بر حسب  $\theta$  به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - m^2 \theta = 0,$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, l) = 0,$$

مانند قبل با استفاده از قاعده حاصلضرب خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad Y(l) = 0, \quad (64)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - (\lambda^2 + m^2)X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (80)$$

جهت  $y$  مسأله، معادله (64)، مشابه مثال ۲ است؛ از اینرو:

$$Y_n(y) = C_n \cos \lambda_n y; \quad \lambda_n = (2n + 1)\pi/2l, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

در جهت  $x$  خواهیم داشت:

$$X_n(x) = B_n e^{-(\lambda_n^2 + m^2)^{1/2} x}, \quad (81)$$

و بنابراین این معادله با مثال ۲ فرق دارد. اگر چه از آنجاییکه جهت  $x$  هیچ نقشی را در محاسبه  $a_n$  بازی نمی‌کند، مقدار  $a_n$  ممکن است با استفاده از معادله (۷۰) بدست آید. از اینرو ممکن است جواب مسأله به سادگی به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-(\lambda_n^2 + m^2)^{1/2} x} \cos \lambda_n y. \quad (82)$$

$m \rightarrow 0$  را می‌توان به صورت  $h \rightarrow 0$  یا  $\sigma \rightarrow \infty$  تفسیر نمود و وقتی که  $m \rightarrow 0$ ، آنگاه معادله (82) به (۷۱) نزدیک می‌شود.

## ۲-۵- مثال ۵

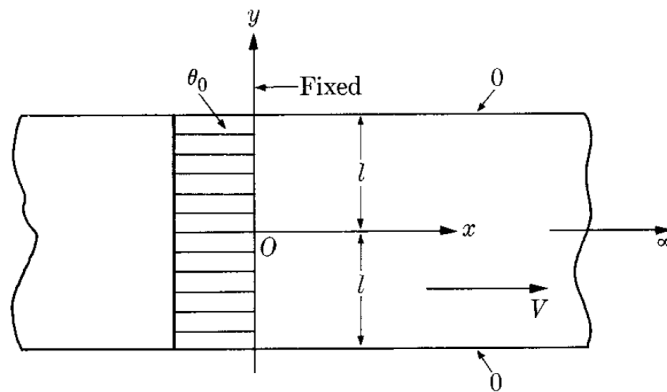
می‌خواهیم بدانیم اثر حرکت بر جواب مسأله ۲ چیست. فرض کنید که سطح گسترش یافته با سرعت ثابت  $v$  در جهت  $x$  حرکت کند، که در آن جهت هدایت قابل صرف نظر است (شکل ۱۵). توزیع دمای پایا با توجه به مبدأ مختصات ثابت استفاده شده در مثال ۲ را بدست آورید.



فرمولاسیون به صورت زیر است:

$$2s \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, l) = 0,$$



شکل ۱۵

که  $2s = \rho c V / k$  است. قاعده حاصلضرب نتایج زیر را حاصل می کند:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad Y(l) = 0, \quad (۶۴)$$

$$2s \frac{dX}{dx} + \lambda^2 X = 0. \quad (۸۳)$$

دوباره می بینیم که در جهت  $Y$  همان فرمولاسیون مثال ۲ و ۴ حاصل می شود.

واضح است که وقتی مسأله فیزیکی و هندسه در یک جهت تغییر نمی کند، روش جداسازی متغیرها همان

فرمولاسیون را برای این جهت حاصل می کند.

در جهت  $x$  جواب به صورت زیر است:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n^2 x / 2s}$$

بنابراین با استفاده از قاعده حاصلضرب داریم:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 x / 2s} \cos \lambda_n y. \quad (84)$$

سرانجام استفاده از شرط مرزی ناهمگن، معادله (84) را به (69)

تبدیل می کند، که در آن مقدار  $a_n$  با استفاده از معادله (70) حاصل می شود. با قرار دادن این مقدار درون معادله

(84)، دمای پره به صورت زیر است:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 x / 2s} \cos \lambda_n y. \quad (85)$$

مثال مذکور یکی از مهمترین مثال های نفوذ خطی است، مسأله *Graetz*، که اکنون بیان می کنیم.

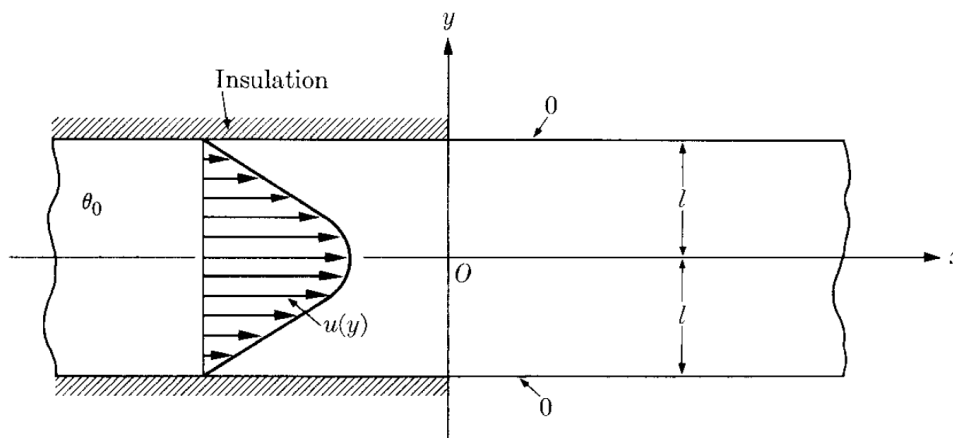
## ۶-۲-۶ مثال

جسم مثال ۵ را با یک سیال ویسکوز با جریان آرام کاملاً توسعه یافته بین دو صفحه موازی تعویض

می کنیم (شکل ۱۶). ضخامت صفحه قابل صرف نظر است. نیمه بالادستی صفحه عایق بوده در حالیکه نیمه

پایین دستی آن در دمای صفر نگه داشته می شود. هدایت محوری قابل صرف نظر است. دمای سیال جریان

بالادستی یکنواخت است، که  $\theta_0$  می باشد. می خواهیم توزیع دما در سیال را بدست آوریم.



شکل ۱۶

فرمولاسیون مسأله با فرمولاسیون مثال ۵ یکسان است. فقط سرعت یکنواخت مسأله ۵، با سرعت جریان

آرام کاملاً توسعه یافته بین دو صفحه موازی جایگزین شده است:

$$u(y) = \frac{(-dp/dx)l^2}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right].$$

می توان این سرعت را به شکل مناسبی بر حسب مقدار متوسط  $u_m$  و متغیر بی بعد  $\eta = y/l$  به صورت زیر بیان

نمود:

$$\frac{u(\eta)}{u_m} = \frac{3}{2} (1 - \eta^2) \quad (۸۶)$$

که  $u_m = (-dp/dx)l^2/3\mu$  است.

بدلیل مطالعه پارامتری مسأله، آنرا به صورت فرمولاسیون بی بعد در نظر گرفتیم. با جایگزینی  $\eta$  با معادله (۸۶) در

فرمولاسیون مثال ۵ و قرار دادن اعداد بی بعد مناسب خواهیم داشت:

$$\frac{3}{2}(1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}, \quad (۸۷)$$

که  $\psi = \theta/\theta_0$ ،  $Pe = u_m l/a$  و  $\xi = (x/l)Pe$  است. معکوس  $\xi$ ، مدول *Graetz* نامیده می شود و با

$Gz = 1/\xi = Pe/(x/l)$  نشان داده می شود. شرایط مرزی در معادله (۸۷) صادق بوده و داریم:

$$\psi(0, \eta) = 1, \quad \frac{\partial \psi(\xi, 0)}{\partial \eta} = 0, \quad \psi(\xi, 1) = 0.$$

با استفاده از قاعده حاصلضرب  $\psi(\xi, \eta) = X(\xi)Y(\eta)$  به راحتی مسأله را می توان تفکیک نمود:

$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \frac{3}{2}\lambda^2(1 - \eta^2)Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{d\eta} = 0, \quad Y(1) = 0, \quad (۸۸)$$

$$\frac{dX}{d\xi} + \lambda^2 X = 0. \quad (89)$$

بر خلاف معادلات موجود در مثال‌های قبلی، جواب معادله (88) را نمی‌توان بر حسب توابع ساده بیان نمود.

بنابراین از روش سری‌های توانی که در جلسات قبل ذکر شد، برای حل استفاده می‌کنیم. می‌توانیم جواب کلی

مسئله را به صورت منحنی زیر نشان دهیم:

$$Y(\eta) = AG_0^{(1)}(\lambda\eta) + BG_0^{(2)}(\lambda\eta), \quad (90)$$

که  $G_0^{(1)}$  و  $G_0^{(2)}$  نشان‌دهنده تابع *Graetz* در مختصات کارترین از نوع اول و دوم با درجه صفر است. دوباره

متذکر می‌شویم که جواب کلی معادله‌ای مثل معادله (90) با ماهیت نوسانی معمولاً متشکل از توابع زوج و فرد

می‌باشد.

فرض می‌کنیم که  $G_0^{(1)}(\lambda\eta)$  و  $G_0^{(2)}(\lambda\eta)$  به ترتیب نشان‌دهنده توابع فرد و زوج هستند. اولین شرط

مرزی در معادله (88) نشان می‌دهد که  $B \equiv 0$  بوده و تابع مشخصه  $\varphi_n(\eta) = G_0^{(1)}(\lambda\eta)$  است. با استفاده از

شرط مرزی دوم، مقادیر مشخصه بدست می‌آید که در واقع این مقادیر مشخصه، ریشه‌های معادله

$G_0^{(1)}(\lambda\eta) = 0$  هستند. با کمک جواب کلی معادله (89) یعنی  $e^{-\lambda^2\xi}$ ، اکنون می‌توانیم قاعده‌ی حاصلضرب را

برای این مسئله به صورت زیر بنویسیم:

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \xi} G_0^{(1)}(\lambda_n \eta). \quad (91)$$

سرانجام با استفاده از شرط مرزی ناهمگن مسئله  $\psi(0, \eta) = 1$  خواهیم داشت:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_0^{(1)}(\lambda_n \eta),$$

که با توجه به معادله (23) داریم:

$$a_n = \frac{\int_0^1 (1 - \eta^2) G_0^{(1)}(\lambda_n \eta) d\eta}{\int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta}. \quad (92)$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از روابط ریاضی،  $a_n$  را به صورت مناسب‌تری بیان نماییم. متذکر می‌شویم که  $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$  یک جواب ویژه معادله (۸۸) است که به جای آن،  $Y(\eta)$  را در این معادله قرار می‌دهیم و با انتگرال‌گیری از نتیجه آن در بازه  $(0,1)$  عبارت ساده‌تری برای صورت معادله (۹۲) به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^1 (1 - \eta^2) G_0^{(1)}(\lambda_n \eta) d\eta = - \frac{2}{3\lambda_n^2} \left. \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{d\eta} \right|_{\eta=1} \quad (93)$$

بعضی اوقات بازآرایی مخرج معادله (۹۲) مهمتر است. ما ابتدا معادله (۸۸) را بر حسب  $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$  به صورت

$dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta) / d\lambda_n$  بیان نموده و سپس از نتیجه حاصل در بازه  $(0,1)$  انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right) \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\lambda_n} \right) \Big|_{\eta=1} - \int_0^1 \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\lambda_n} \right) d\eta \\ - \frac{3}{4} \lambda_n^2 \frac{d}{d\lambda_n} \int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta = 0. \end{aligned} \quad (94)$$

سپس معادله (۸۸) را که به صورت  $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$  بیان شده در  $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$  ضرب کرده و از نتیجه حاصل در همان بازه انتگرال می‌گیریم و داریم:

$$G_0^{(1)} \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \Big|_{\eta=1} - \int_0^1 \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right)^2 d\eta + \frac{3}{2} \lambda_n^2 \int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta = 0. \quad (95)$$

با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۹۵) با توجه به  $\lambda_n$  نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\lambda_n} \right) \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right) \Big|_{\eta=1} + G_0^{(1)} \frac{d}{d\lambda_n} \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right) \Big|_{\eta=1} - 2 \int_0^1 \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \frac{d}{d\lambda_n} \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right) d\eta \\ + 3\lambda_n \int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta \\ + \frac{3}{2} \lambda_n^2 \frac{d}{d\lambda_n} \int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

متذکر می‌شویم که مرتبه دیفرانسیل‌گیری با توجه به  $\eta$  و  $\lambda_n$  ممکن است تغییر نماید. با تقسیم معادله (۹۶) بر ۲

و جایگذاری نتیجه از معادله (۹۴) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta = \frac{1}{3\lambda_n^2} \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{d\lambda_n} \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=1} \quad (97)$$

با قرار دادن معادلات (93) و (97) درون معادله (92) خواهیم داشت:

$$a_n = - \frac{2}{\lambda_n dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta) / d\lambda_n |_{\eta=1}} .$$

بنابراین توزیع دما درون سیال به صورت زیر است:

$$\psi(\xi, \eta) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \xi} G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{\lambda_n dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta) / d\lambda_n |_{\eta=1}} . \quad (98)$$

اگر چه با توجه به نقطه نظر محاسبات انتقال حرارت، آگاهی از حرارت تلف شده از سیال مهمتر از آگاهی از دمای سیال است. در این ارتباط ما ابتدا در مورد اعداد بدون بعد وابسته به انتقال حرارت از سطوح بحث می کنیم.

همانطور که در فصل ۲ دیدیم، ممکن است انتقال حرارت  $q_n$  از سطح  $\sigma$  با استفاده از ضریب انتقال حرارت به صورت زیر باشد:

$$q_n = h(T_\sigma - T_\infty),$$

که  $T_\sigma$  و  $T_\infty$  به ترتیب نشان دهنده دماهای سطح و محیط می باشند. همچنین در فصل ۲،  $q_n$  را بر حسب هدایت از یا به جسم بیان نمودیم. بنابراین با توجه به شکل ۱۷ الف خواهیم داشت:

$$-k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial n} \right)_\sigma = h(T_\sigma - T_\infty),$$

که  $T_s$  و  $k_s$  به ترتیب دما و ضریب هدایت پذیری جسم هستند. با بازآرایی معادله مذکور، عدد بایوت به صورت زیر حاصل می شود:

$$Bi = \frac{hL}{k_s} = - \frac{[\partial T_s / \partial (n/L)]_\sigma}{T_\sigma - T_\infty}, \quad (99)$$

که  $L$  طول مشخصه است. به طور واضح ممکن است که  $q_n$  را نیز بر حسب هدایت از یا به سیال (نشان داده شده در شکل ۱۷ب) بیان کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

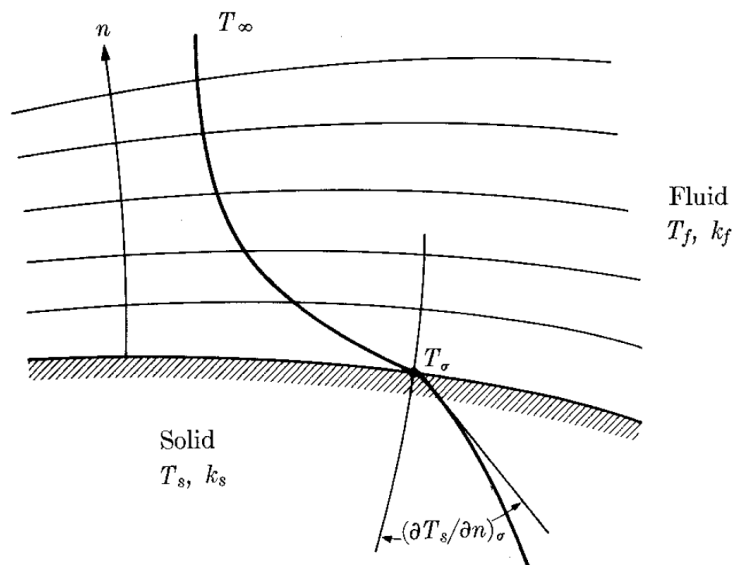
$$-k_f \left( \frac{\partial T_f}{\partial n} \right)_\sigma = h(T_\sigma - T_\infty),$$

که می توان آن را به صورت زیر بازآرایی نمود:

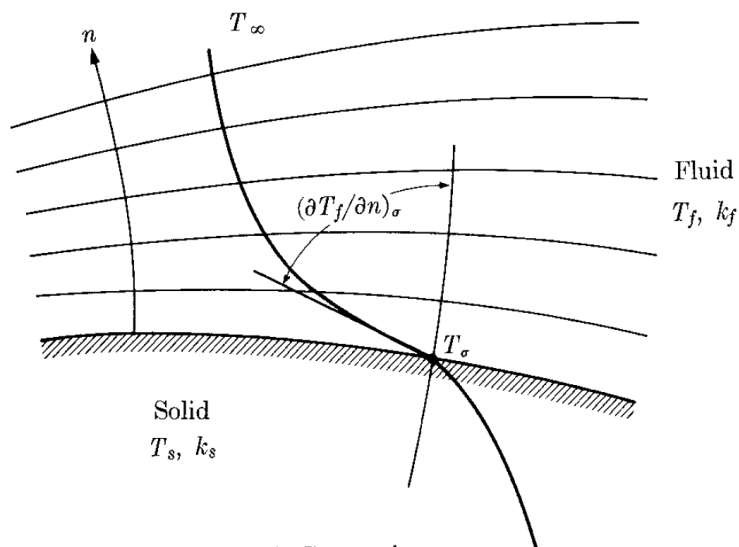
$$\text{Nu} = \frac{hL}{k_f} = - \frac{[\partial T_f / \partial (n/L)]_\sigma}{T_\sigma - T_\infty}, \quad (100)$$

که  $N_n$  به عنوان عدد (ضریب) ناسلت معروف است. وقتیکه سیال محدود باشد،  $T_\infty$  در معادلات (۹۹) و (۱۰۰)

را با دمای متوسط سیال که دمای بالک نامیده می شود، تعویض می نماییم،



(a) Conduction



(b) Convection

شکل ۱۷

$$T_b = \frac{1}{AU} \int_A u(\mathbf{r}, t) T(\mathbf{r}, t) dA, \quad (101)$$

که  $A$  نشان‌دهنده سطح سیال و  $U$  معیاری از مقدار سرعت متوسط سیال است. تذکری در مورد تفاوت در استفاده از معادلات (۹۹) و (۱۰۰): در مسائل هدایت،  $h$  و  $T_\infty$  (یا  $T_b$ ) در مسأله داده می‌شود، و معادله (۹۹) به عنوان شرط مرزی استفاده می‌شود. در مسائل جابه‌جایی  $T_\infty$  داده شده ولی  $h$  داده نمی‌شود. مسائل جابه‌جایی بر حسب شرایط مرزی نامربوط به  $h$  حل می‌شوند؛ سپس جواب‌های حاصل برای حصول مقدار  $h$  درون معادله (۱۰۰) قرار داده می‌شود.

حال می‌خواهیم به مسأله خودمان برگردیم. شکل مناسب معادلات (۱۰۰) و (۱۰۱) به صورت زیر است:

$$\text{Nu} = \frac{hl}{k} = \frac{-(\partial\psi/\partial\eta)_{\eta=1}}{\psi_b}$$

و:

$$\psi_b = \frac{3}{2} \int_0^1 (1 - \eta^2) \psi(\xi, \eta) d\eta.$$

سرانجام با استفاده از معادله (۹۸) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_{\eta=1} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^{(1)}/d\eta}{\lambda_n dG_0^{(1)}/d\lambda_n} \Big|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}.$$

سپس با قراردادن معادله (۹۸) درون  $\psi_b$  و نوشتن معادله (۹۳) خواهیم داشت:

$$\psi_b = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^{(1)}/d\eta}{\lambda_n^3 dG_0^{(1)}/d\lambda_n} \Big|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}.$$



بنابراین عدد ناسلت به صورت زیر حاصل می شود:

$$Nu = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^{(1)}/d\eta}{\lambda_n dG_0^{(1)}/d\lambda_n} \Big|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^{(1)}/d\eta}{\lambda_n^3 dG_0^{(1)}/d\lambda_n} \Big|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}} \quad (102)$$

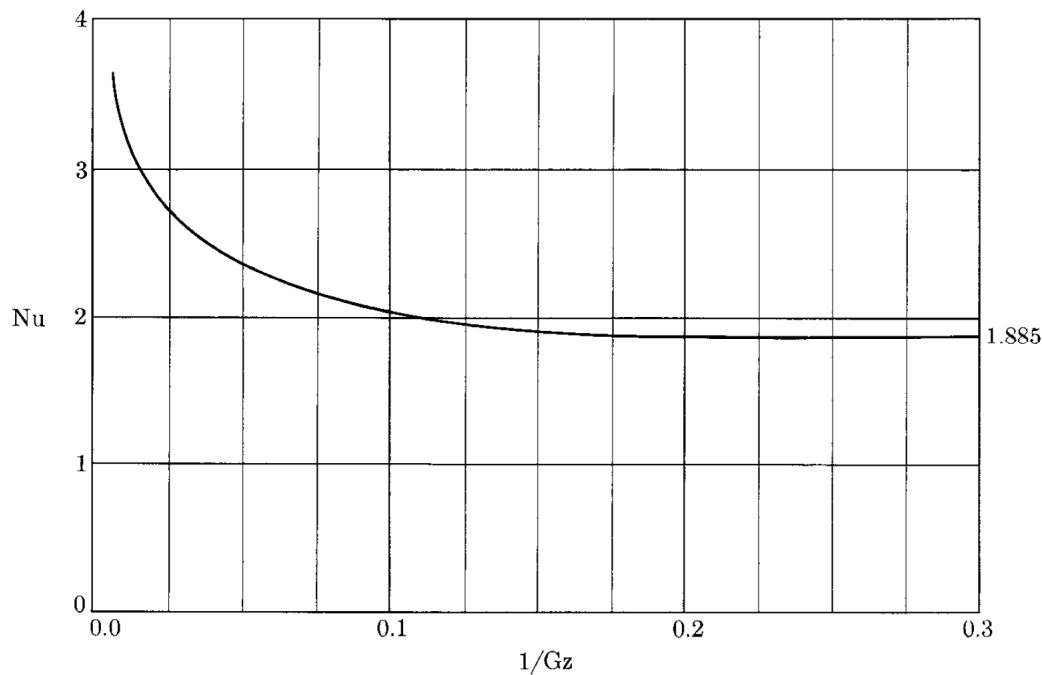
در شکل ۱۸، ناسلت بر حسب  $\xi$  رسم شده است. بنابراین

می توان فهمید که وقتی که  $\xi \rightarrow 0$ ، آنگاه  $Nu \rightarrow \infty$  و وقتی که  $\xi \rightarrow \infty$  آنگاه  $Nu \rightarrow 1.825$  [حدود مذکور

برای  $Nu$  با استفاده از فیزیک مسأله بدست آمده است].

در مثال بعدی اثر هدایت محوری بر مسأله بررسی می شود. اگر چه بدلیل جلوگیری از افزایش پیچیدگی مسأله،

فرض می شود که سیال مورد نظر ایده آل باشد (یا یک سطح گسترش یافته متحرک داشته باشیم).



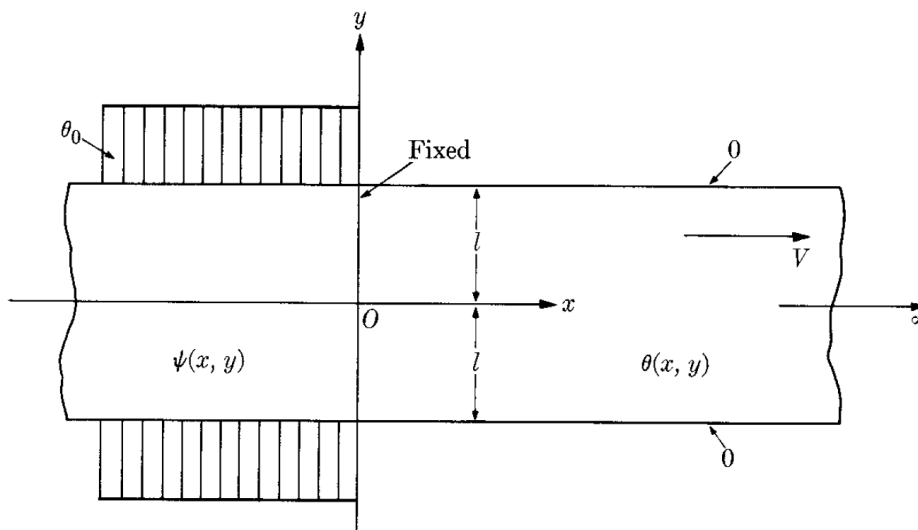
شکل ۱۸

## ۲-۷-۲- مثال ۷

مثال ۵ را برای زمانی که اثرات هدایتی در جهت حرکت هم در نظر گرفته شده، حل کنید.

طبق توضیحات مثال ۳ از جلسه پنجم، رسانش محوری دو اثر دارد. اول، اثر خود رسانش محوری که اغلب مورد توجه است و به صورت  $\partial^2 \theta / \partial x^2$  در معادلات دیفرانسیل داده می‌شود، و اثر دوم با همان اهمیت، در فیزیک مسأله مستتر است که آن نفوذ رسانشی گرما به خارج از محدوده انتگرالی اولیه است. بنابراین در این مسأله ما دو محدوده داریم (شکل ۱۹). از آنجاییکه نقطه  $x=0$  مرز بین دو ناحیه است، دما در  $x=0$  قابل تعیین نیست.

در اینجا باید شرایط مرزی طبیعی مشخص شود؛ به عبارت دیگر تساوی دماها و شارهای حرارتی باید مشخص شود. در فاصله منفی دور از نقطه  $x=0$  یا به عبارت دیگر در سطح پره هنگامیکه  $x < 0$  است، دما به صورت  $\theta_0$  قابل نمایش است. با استفاده از معادله  $\theta(x, y)$  برای توزیع دما ناحیه  $x > 0$  و  $\psi(x, y)$  برای  $x < 0$  دمای مسأله را می‌توان به شکل زیر نوشت:



شکل ۱۹

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad x < 0$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0$$

$$\psi(-\infty, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\psi(0, y) = \theta(0, y), \quad \frac{\partial \psi(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0,$$

$$\psi(x, l) = \theta_0, \quad \theta(x, l) = 0.$$

این فرمولاسیون دو معادله دیفرانسیل همگن را شامل می‌شود به همراه چهار شرط مرزی همگن و چهار شرط مرزی ناهمگن. یکی از شرایط ناهمگن،  $\psi(x, l) = \theta_0$ ، یک ناهمگنی را به جهتی که قابلیت متعادل شدن را دارد وارد می‌کند و بنابراین استفاده از روش جداسازی متغیرها برای ناحیه  $x < 0$  مناسب است، اگر چه تبدیل  $\psi(x, y) = \theta_0 + \phi(x, y)$  برای  $x < 0$  این مشکل را رفع خواهد کرد. از اینرو ایزوترم  $\phi(x, y)$  برای ناحیه  $x < 0$  به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad x < 0$$

$$\phi(-\infty, y) = 0,$$

$$\theta_0 + \phi(0, y) = \theta(0, y), \quad \frac{\partial \phi(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \phi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \phi(x, l) = 0,$$

که معادلات باقیمانده فرمولاسیون قبلی برای  $x > 0$  بدون تغییر باقی و دیگر تکرار نمی‌شود.

پاسخ همگن جهت  $y$  در  $\theta(x, y)$  و  $\phi(x, y)$  در مثال‌های ۲، ۴ و ۵ یکسان است. پاسخ کلی در جهت  $x$  به صورت زیر می‌شود:

$$X_n(x) = A_n e^{[s+(s^2+\lambda_n^2)^{1/2}]x} + B_n e^{[s-(s^2+\lambda_n^2)^{1/2}]x}, \quad (103)$$

که پاسخ فوق برای هر دو ناحیه‌ها قابل استفاده است. هر چند جمله اول معادله (۱۰۳)، فیزیک منطقه  $x < 0$  را ارضا می‌کند، در حالیکه جمله دوم برای منطقه  $x > 0$  مناسب است. از اینرو پاسخ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\psi(x, y) = \theta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{[s + (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]x} \cos \lambda_n y, \quad (104)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{[s - (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]x} \cos \lambda_n y. \quad (105)$$

در اینجا  $a_n$  و  $b_n$  از روی شرایط مرزی در  $x=0$  بدست می‌آیند. با مساوی قرار دادن دمای دو ناحیه:

$$\theta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \lambda_n y. \quad (106)$$

با بسط  $\theta_0$  بصورت مجموعه سری‌های متعامد از معادله (۶۶)، پاسخ به صورت زیر است:

$$\theta_0 = \frac{2\theta_0}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \cos \lambda_n y, \quad (107)$$

با قرار دادن معادله (۱۰۷) در معادله (۱۰۶) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$(-1)^n \frac{2\theta_0}{\lambda_n l} + a_n = b_n. \quad (108)$$

تساوی شارهای حرارتی نتیجه زیر را می‌دهد:

$$[s + (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]a_n = [s - (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]b_n. \quad (109)$$

سپس حل معادله (۱۰۵) و (۱۰۹) برای  $a_n$  و  $b_n$  و جایگذاری نتایج در معادلات (۱۰۴) و (۱۰۵) و تعریف پارامترهای بدون بعد، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$Pé \text{ (or } P) = Vl/a, \quad Gz = 1/\xi = Pé/(x/l),$$

$$\eta = y/l, \quad \mu_n = (2n + 1)\pi/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

در نهایت دمای بدون بعد دو ناحیه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\psi(\xi, \eta, P)}{\theta_0} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu_n} \left[ 1 - \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right] \times \cos \mu_n \eta \exp \left( \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \left( \frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi \right), \quad \xi < 0, \quad (110)$$

(۱۱۱)

$$\theta(\xi, \eta; P) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ 1 - \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2}} \right\} \times \cos \mu_n \eta \exp \left( \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 + \left( \frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi \right), \quad \xi > 0.$$

برای جزییات بیشتر، مثال ۳ جلسه پنجم را ملاحظه کنید.

$$\frac{\text{Axial enthalpy flow}}{\text{Axial conduction}} = Pe,$$

زمانیکه  $Pe \rightarrow \infty$  اثرات رسانش محوری حذف شده و معادلات (۱۱۰) و (۱۱۱) تبدیل به معادلات زیر

می شوند:

$$\frac{\psi(\xi, \eta)}{\theta_0} = 0, \quad \xi < 0, \quad (112)$$

$$\frac{\theta(\xi, \eta)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu_n} e^{-\mu_n^2 \xi} \cos \mu_n \eta, \quad \xi > 0. \quad (113)$$

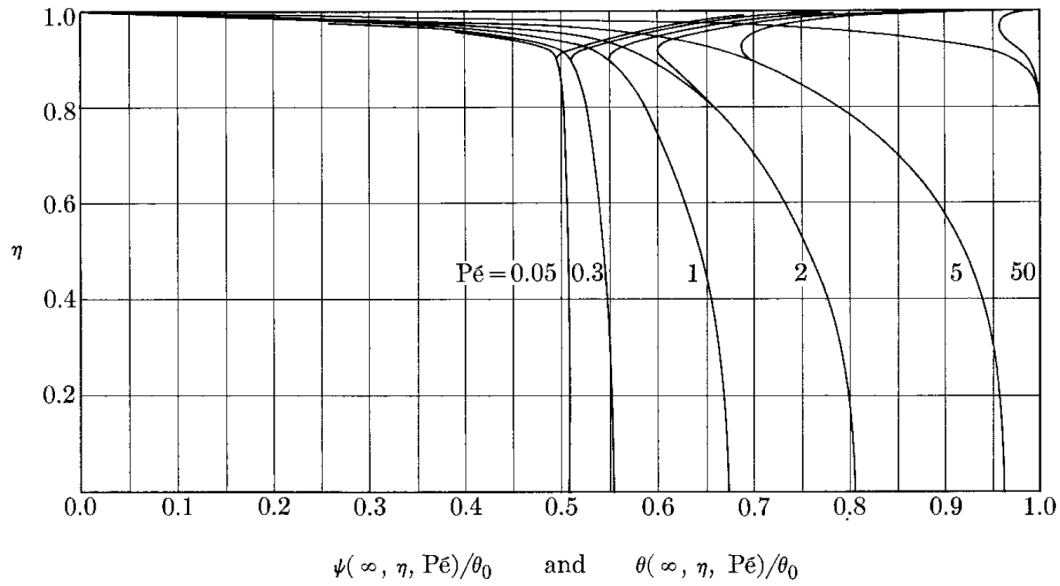
معادله (۱۱۳) مطابق انتظار، شکل بی بعد معادله (۸۵) است.

شکل بی بعد دمای  $\psi(x, y)$  و  $\theta(x, y)$  بوسیله معادلات (۱۱۰) و (۱۱۱) داده شده است. حال به ادامه بحث با

مطالعه عددی مسأله می پردازیم.

در شکل ۲۰ دمای مرز دو سیستم که دما در نقطه  $\xi = 0 (Gz = \infty)$  است، بر اساس  $\eta$  مقادیر ۰/۳، ۰/۰۵،

۱، ۲، ۵ و ۵۰ عدد  $Pe$  رسم شده است. نتایج نشان دهنده اثرات مثبت رسانش محوری با کاهش  $Pe$  می باشد.



شکل ۲۰

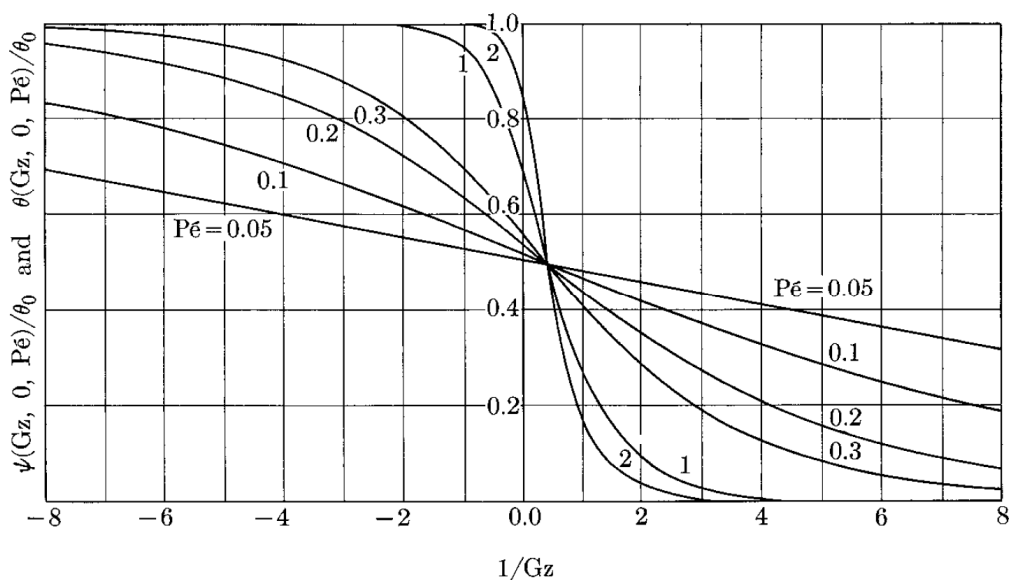
در شکل ۲۱ دمای صفحه میانی بر حسب  $1/Gz$  برای مقادیر  $Pe$  ۰/۰۵، ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳، ۱ و ۲ عدد  $Pe$  رسم شده است. طبق انتظار، نفوذ توزیع دما به محدوده  $x < 0$  با کاهش عدد  $Pe$  افزایش می یابد.

در نهایت ضریب انتقال حرارت  $h$  بر پایه فاصله  $L$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$\theta_b = \int_0^1 \theta d\eta \quad \text{and} \quad \psi_b = \int_0^1 \psi d\eta$$

و در ادامه:

$$Nu = \frac{(\partial\psi/\partial\eta)_{\eta=1}}{\psi_w - \psi_b}, \quad \xi < 0,$$



شکل ۲۱

$$\text{Nu} = \frac{-(\partial\theta/\partial\eta)_{\eta=1}}{\theta_b - \theta_w}, \quad \xi > 0,$$

که در معادلات بالا  $\psi_w = \psi(\xi, 1; P) = \theta_0$  و  $\theta_w = \theta(\xi, 1; P) = 0$ . با قرار دادن معادلات (۱۱۰) و (۱۱۱) در

معادلات فوق، معادلات زیر بدست می آیند:

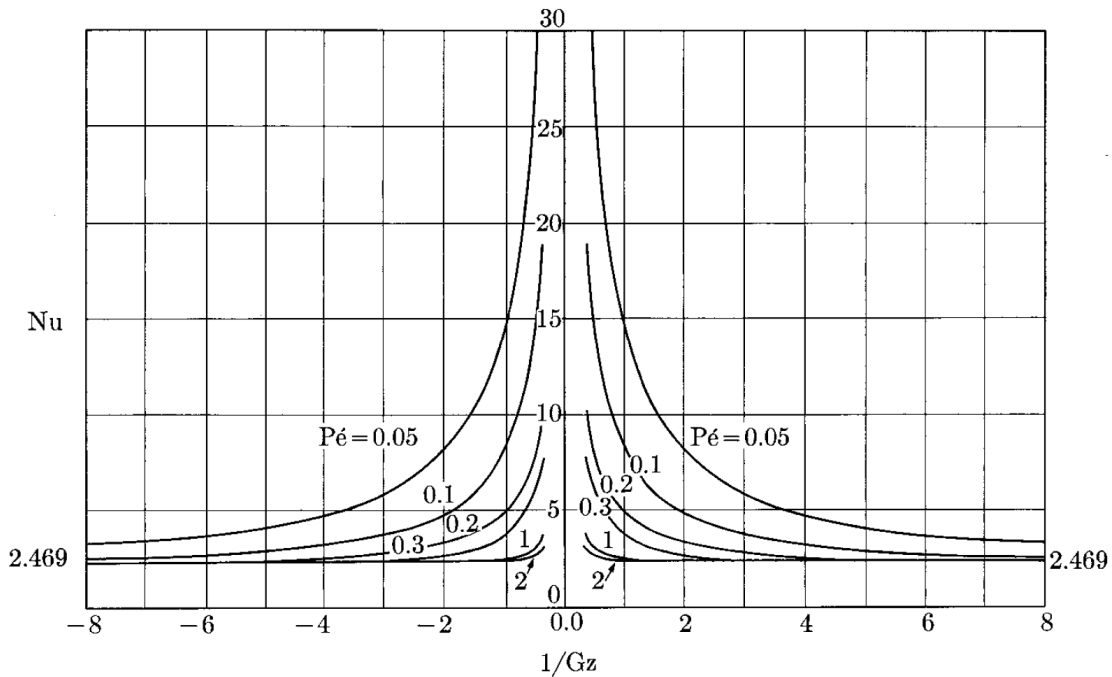
$$\text{Nu} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \left(\frac{2\mu_n}{P}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \left(\frac{2\mu_n}{P}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi\right)}, \quad \xi < 0, \quad (114)$$

$$\text{Nu} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 + \left(\frac{2\mu_n}{P}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left\{ 1 + \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 + \left(\frac{2\mu_n}{P}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi\right)}, \quad \xi > 0. \quad (115)$$

معادلات (۱۱۴) و (۱۱۵) در شکل ۲۲ بر حسب  $I/Gz$  برای مقادیر ۰/۳، ۰/۲، ۰/۱، ۰/۰۵، ۰/۱ و ۲ عدد  $Pe$  رسم

شده است. توجه به این نکته ضروری است که توسعه ضریب انتقال حرارت با افزایش اهمیت رسانش محوری،

کاهش می یابد.



شکل ۲۲

### ۳- انتخاب محورهای مختصات (XML)

در بخش‌های گذشته تعدادی مسأله دو بعدی در مختصات کارتزین بدون هیچ بحثی راجع به مختصات انتخاب شده حل شد. همچنین پاسخ مثال ۱ (برای دمای پایه ثابت) و مثال ۲ که هر دو یک شرایط فیزیکی یکسانی را بیان می‌کنند، به صورت دو سیستم مختصات مختلف در نظر گرفته شده است. پاسخ‌ها از نظر پیچیدگی ریاضی، قابل قیاس هستند و از این رو انتخاب محورهای مختصات که در بعضی مسائل از اهمیت بالایی برخوردار است، در مثال‌های زیر تشریح شده است.

#### ۳-۱- مثال ۸

مثال ۲ را با فرض اینکه پره طول محدود  $L$  را داشته باشد را دوباره حل کنید (شکل ۲۳).



مسئله مشابه مثال‌های قبل قابل جداسازی است. پاسخ در جهت  $y$  (جهت متعامد) همانند مثال‌های ۲، ۴، ۵ و ۷ می‌باشد. پاسخ در جهت  $x$  (جهت غیرمتعامد) اکنون به طور صریح بدست می‌آید. فرمولاسیون این جهت همراه با شرط مرزی قابل تفکیک به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0, \quad (116)$$

$$X(L) = 0. \quad (117)$$

برای بازه محدود از توابع هیپربولیک استفاده می‌شود که پاسخ کلی معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

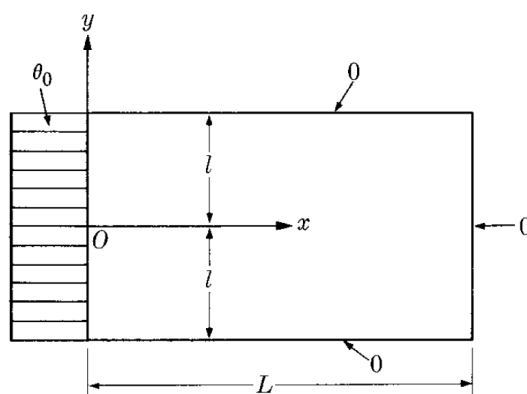
$$X(x) = A \cosh \lambda x + B \sinh \lambda x. \quad (118)$$

با قرار دادن شرط معادله (۱۱۷) در معادله (۱۱۸) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$0 = A \cosh \lambda L + B \sinh \lambda L. \quad (119)$$

با حل معادله (۱۱۹) برای  $A$  یا  $B$ ، به طور مثال برای  $B$ ، و قرار دادن نتیجه بدست آمده در معادله (۱۱۸)، معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$X(x) = A \left( \cosh \lambda x - \frac{\cosh \lambda L}{\sinh \lambda L} \sinh \lambda x \right),$$



شکل ۲۳

که معادله فوق به صورت زیر بازآرایی می‌شود:

$$X(x) = A^* \sinh \lambda(L - x), \quad A^* = A/\sinh \lambda L.$$

پس پاسخ حاصلضرب مسأله به صورت زیر نوشته می شود:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \sinh \lambda_n(L - x) \cos \lambda_n y.$$

با مقداردهی  $a_n^*$  مشابه مثال های قبل، توزیع دما در پره به صورت معادله زیر می شود:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n l)} \left[ \frac{\sinh \lambda_n(L - x)}{\sinh \lambda_n L} \right] \cos \lambda_n y. \quad (120)$$

حال مسأله را برای حالتیکه مختصات سیستم به صورت نشان داده شده در شکل ۲۴ باشد، حل می کنیم.

فرمولاسیون جهت  $y$  ثابت باقی می ماند، ولی فرمولاسیون در جهت  $x$  تغییر می کند. در اینجا متغیر جدید  $\xi$

تعریف می شود:

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} - \lambda^2 X = 0, \quad (121)$$

$$X(0) = 0. \quad (122)$$

پاسخ کلی معادله (۱۲۱) به صورت معادله (۱۱۸) خواهد شد، با این تفاوت که  $x$  با  $\xi$  جایگزین می شود. با

استفاده از معادله (۱۲۲)  $A=0$  می شود و قاعده حاصلضرب جدید بدست می آید:

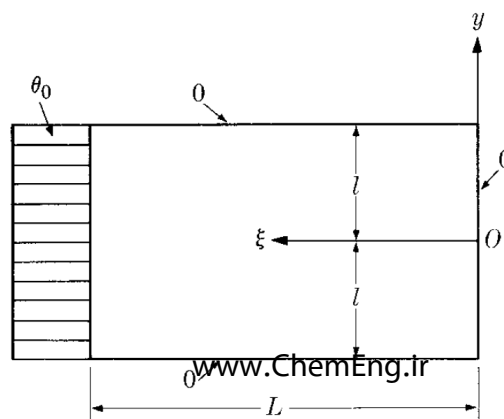
$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sinh \lambda_n \xi \cos \lambda_n y.$$

با مقداردهی  $b_n$  دمای پره به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\theta(\xi, y)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n l)} \left( \frac{\sinh \lambda_n \xi}{\sinh \lambda_n L} \right) \cos \lambda_n y. \quad (123)$$

ازاینرو، به علت ساده تر بودن پاسخ در جهت  $x$ ، سیستم مختصات شکل ۲۴ برای این مسأله مناسب تر از سیستم

مختصات شکل ۲۳ می شود.



شکل ۲۴

اکنون نتایج فوق برای جهت ناهمگن می‌تواند با دربرگرفتن یک عبارت مشابه، برای انتخاب جهت همگن عمومیت یابد.

در فرمولاسیون یک مسأله، انتخاب محور مناسب و معمول اهمیت زیادی دارد. در بحث جداسازی متغیرها و تئوری توابع متعامد بیان شد که شرط مرزی اول در جهت همگن در هر مسأله‌ای توابع مشخصه را بر پایه سیستم مختصات انتخاب شده، محاسبه می‌کند. شرط مرزی دوم به همراه نتیجه بدست آمده از شرط مرزی اول، مقادیر مشخصه را نتیجه می‌دهد (مسأله ۴ را ملاحظه کنید). بنابراین ساده‌ترین توابع مشخصه ممکن، متناسب با محورهای مختصاتی است (در جهت همگن) که از روی ساده‌ترین شرط مرزی همگن بدست می‌آید. نتیجه حاصله دیگر این است که شرط مرزی همگن رابطه‌ای بین پاسخ‌های ویژه در جهت ناهمگن می‌دهد. بنابراین ساده‌ترین پاسخ در این جهت، پاسخ برای محورهای مختصاتی است (در جهت همگن) که از روی ساده‌ترین شرط مرزی همگن بدست می‌آید.

نتیجه حاصله دیگر این است که شرط مرزی همگن رابطه‌ای بین پاسخ‌های ویژه در جهت ناهمگن می‌دهد. بنابراین ساده‌ترین پاسخ در این جهت، پاسخ برای محورهای مختصاتی است (در همان جهت) که از شرط مرزی قابل تفکیک بدست آمده باشد.

این روش تنها برای انتخاب محورهای مختصات در مسائل یک بعدی استفاده می‌شود. این نکته عجیب نیست، زیرا مسائل یک بعدی مسائل مقدار مشخصه نیستند و شرایط مرزی آنها برای مقادیر ضرایب نامعین پاسخ‌های ویژه استفاده می‌شود، نه برای بدست آوردن توابع مشخصه و مقادیر مشخصه. از اینرو در مسائل یک

بعدی، بوسیله انتخاب مبدأ در یک مرز پیچیده می‌توان یک یا دو جهت که شامل این ضرایب می‌باشند را به طور قابل ملاحظه‌ای ساده کرد.

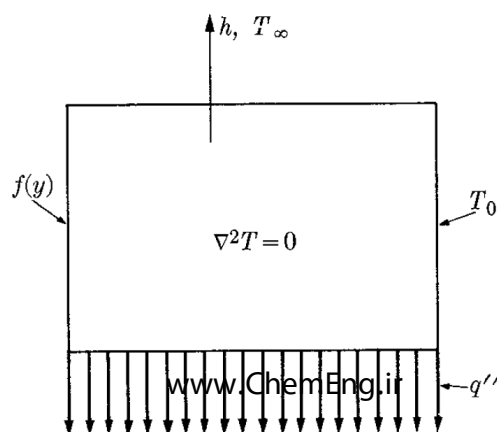
#### ۴- ناهمگنی

در گذشته، مسائل دو بعدی پایدار مختصات کارتزین که با روش جداسازی متغیرها حل می‌شود، شامل یک معادله دیفرانسیل همگن به همراه دو شرط مرزی همگن در جهت محدود یا یک شرط مرزی همگن به همراه یک شرط ناهمگن در جهت باقیمانده (محدود یا نامحدود) بود. اما اغلب مسائل دو بعدی این روش شرایط را ارضا نمی‌کند و در بعضی موارد مسائل باید در صورت امکان تبدیل به شکلی شوند که در شرایط بالا صدق کند. یک راه انجام این تبدیل، تغییر سطح دما می‌باشد، روشی که در مثال‌های قبلی حل شده در این فصل مورد استفاده قرار گرفته است. اگر این مورد امکان پذیر نبود، از مفهوم قاعده جمع پذیری استفاده می‌شود. به این صورت که می‌توان مسأله را به چند مسأله ساده‌تر که هر کدام از آنها در شرایط همگنی مورد نیاز صدق کنند تقسیم نمود و در نهایت، مسأله‌های مورد نظر جمع شوند.

ناهمگنی می‌تواند نتیجه ناهمگنی در مرزها و یا ناهمگنی در معادله دیفرانسیل باشد. از آنجاییکه مرزهای ناهمگن ساده‌تر می‌باشند، ابتدا مورد بررسی قرار می‌گیرند.

#### ۴-۱- مثال ۹

مطلوبست محاسبه دمای پایدار مسأله نشان داده شده در شکل ۲۵.



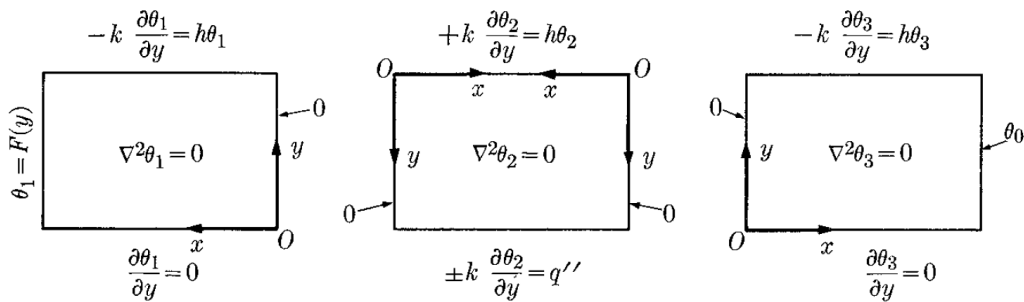
شکل ۲۵

$$\begin{array}{c} \pm k \frac{\partial \theta}{\partial y} = h\theta \\ \left[ \begin{array}{c} f(y) - T_{\infty} = F(y) \\ \nabla^2 \theta = 0 \\ \theta_0 = T_0 - T_{\infty} \end{array} \right] \\ \pm k \frac{\partial \theta}{\partial y} = q'' \end{array}$$

شکل ۲۶

محور عمودی به طور دلخواه و بدون توجه به کلیت مسأله، جهت  $y$  انتخاب می‌شود. شکل ۲۵ قابل تقسیم به چهار مسأله می‌باشد. هر کدام از آنها شامل یک شرط ناهمگن و سه شرط مرزی همگن هستند. گرچه، تبدیل ساده  $\theta = T - T_{\infty}$  (یا  $\psi = T - T_0$ ) شرط مرزی ناهمگن  $h$  را به شرط مرزی همگن تبدیل می‌کند. با استفاده از  $\theta = T - T_{\infty}$ ، مسأله از شکل ۲۵ به شکل ۲۶ تبدیل می‌شود. این مسأله اکنون قابل بیان به صورت سه مسأله مناسب می‌باشد نه چهار مسأله. توجه شود که تبدیل یک شرط مرزی ناهمگن به یک شرط مرزی همگن، فیزیک آن شرط مرزی را نباید تغییر دهد. به عبارت دیگر، تنها شکل همگن معادله  $\pm k(\partial T / \partial n) = hT$ ،  $\pm k(\partial T / \partial n) = h(T - T_{\infty})$  می‌باشد و آن زمانی است که  $T_{\infty}$  صفر باشد، یا تنها فرم همگن معادله  $\pm k(\partial T / \partial n) = q''$  به صورت  $\pm k(\partial T / \partial n) = 0$  می‌باشد.

از اینرو مسئله شکل ۲۶ به صورت سه مسأله نشان داده شده در شکل ۲۷ در می‌آید که مجموع  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$  در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی شکل ۲۶ صدق می‌کنند. پاسخ  $\theta_1$ ،  $\theta_2$  و  $\theta_3$  مشابه مثال‌های قبلی بدست می‌آید و در اینجا نیز لازم به ذکر نیست. محورهای مناسب برای هر مسأله در شکل ۲۷ نشان داده شده است. پاسخ این مسائل زمانی قابل جمع کردن است که این مسائل به صورت سیستم مختصات معمول نوشته شود.



شکل ۲۷

نوع دوم ناهمگنی، ناهمگنی در معادله دیفرانسیل است که وابسته به تولید انرژی داخلی می‌باشد. مثال بعد روش حل اینگونه مسائل را نشان می‌دهد.

#### ۴-۲- مثال ۱۰

دمای پایدار گرمکن الکتریکی مثال ۱ جلسه چهارم، زمانی که ضریب انتقال حرارت عدد بزرگی باشد را پیدا کنید.

فرمولاسیون مسأله به صورت ترم‌های شکل ۲۸ به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \quad (124)$$

$$(125)$$

$$\frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \theta(L, y) = 0,$$

(۱۲۶)

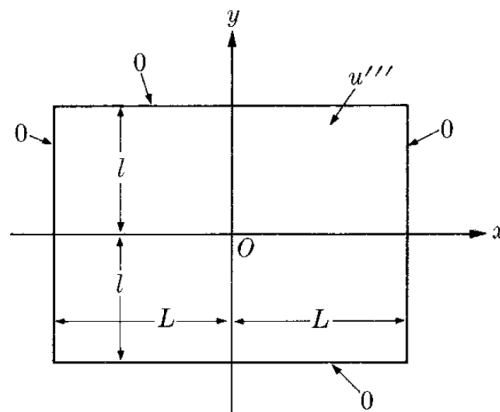
$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, l) = 0.$$

معادله دیفرانسیل ناهمگن و غیر قابل تفکیک است.

پاسخ مسأله به صورت زیر فرض می شود:

$$\theta(x, y) = \psi(x, y) + \phi(x) \quad (۱۲۷)$$

یا:



شکل ۲۸

$$\theta(x, y) = \psi(x, y) + \phi(y). \quad (۱۲۸)$$

استفاده از هر کدام از این شکل ها در این مورد اختیاری است.

با استفاده از تولید انرژی داخلی  $u'''$  در فرمولاسیون مسأله یک بعدی  $\phi(x)$  یا معادله دیفرانسیل دو بعدی مسأله

$\psi(x, y)$  همگن می شود. بنابراین  $\psi(x, y)$  برای جداسازی متغیرها مناسب است. ولی فرمولاسیون کلی  $\phi(x)$

و  $\psi(x, y)$  نیازمند مشخص شدن شرایط مرزی هر کدام از آنها است. در اینجا فرض می شود که  $\phi(x)$  شکل

یک بعدی معادله (۱۲۵) را ارضا می کند. از اینرو:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{u'''}{k} = 0; \quad \frac{d\phi(0)}{dx} = 0, \quad \phi(L) = 0. \quad (129)$$

سپس با ترکیب معادلات (۱۲۴)، (۱۲۵)، (۱۲۶)، (۱۲۷) و (۱۲۹) شکل معادله  $\psi(x, y)$  نیز به صورت زیر

می شود:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \quad (130)$$

$$\frac{\partial\psi(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \psi(L, y) = 0, \quad (131)$$

$$\frac{\partial\psi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \psi(x, l) = -\phi(x). \quad (132)$$

مسئله تفکیک ناپذیر  $\theta(x, y)$  تبدیل به مسئله قابل تفکیک  $\psi(x, y)$  می شود. جزئیات راه حل به خواننده

واگذار می شود و پاسخ به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\theta(x, y)}{u''L^2/k} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)^3} \left( \frac{\cosh \lambda_n y}{\cosh \lambda_n l} \right) \cos \lambda_n x, \quad (133)$$

که در رابطه فوق  $\lambda_n L = (2n+1)\pi/2$  و  $n = 0, 1, 2, \dots$  می باشد. توجه شود که روش فوق برای مختصات

استوانه ای و کروی و مسائل ناپایدار نیز به طور کلی قابل استفاده است.

مطالعه مسائل دو بعدی در مختصات کارترین با یک مثال که با روش تقریبی انتگرالی حل شده به پایان می رسد.

#### ۴-۳- مثال ۱۱

مثال ۱۰ را بوسیله روش انتگرالی، با استفاده از تقریب درجه دوم ریتز و کانترویچ دوباره حل کنید.

با توجه به تقارن حرارتی مسئله نسبت به محورهای شکل ۲۸، روش ریتز پیشنهاد می شود:

$$\theta(x, y) = (L^2 - x^2)(l^2 - y^2)(a_0 + a_1x^2 + b_1y^2 + a_2x^4 + b_2y^4 + c_2x^2y^2 + \dots). \quad (134)$$

در معادله (۱۳۴)،  $(a_0 + b_1y^2)$  یا  $(a_0 + a_1x^2)$  به عنوان جمله آخر تقریب درجه دوم قابل استفاده است. این

انتخاب وابسته به نسبت  $L/l$  است و در فصل ۸ در موردش بحث می شود. در اینجا:



$$\theta(x, y) = (L^2 - x^2)(l^2 - y^2)(a_0 + a_1x^2) \quad (135)$$

معادله فوق به صورت دلخواه انتخاب شده است.

معادله (135) دو پارامتر مجهول دارد،  $a_1$  و  $a_0$ ، که برای محاسبه نیاز به دو شرط مرزی دارد. طبق روش‌های گذشته، شکل انتگرالی معادله حاکم دیفرانسیلی، معادله (132) و (133) بوده و به عنوان یکی از این شرایط استفاده می‌شود. همانطور که در جلسات پیش اشاره شد، دو روش برای بدست آوردن شرط سوم وجود دارد. یکی از آنها وابسته به فرمولاسیون انتگرالی است و دیگری مربوط به فرمولاسیون دیفرانسیلی مسأله است. ادامه حل به عهده خواننده می‌باشد و در اینجا قسمت بعدی بررسی می‌شود. از آنجاییکه معادله (135) تنها در شرط مرزی مسأله صدق می‌کند، بیشترین عدم تطابق بین معادله (135) و حل دقیق معادله در دورترین نقاط از مرزها، خصوصاً در مبدأ محورهای مختصات، روی می‌دهد. از اینرو فرمولاسیون دیفرانسیلی مسأله که در مبدأ معادله (135) را ارضا می‌کند، شرط دوم متداول می‌شود:

$$4 \int_0^L \int_0^l \{-2(l^2 - y^2)[(a_0 - a_1L^2) + 6a_1x^2] - 2(a_0L^2 + a_1L^2x^2 - a_0x^2 - a_1x^4) + (u'''/k)\} dx dy = 0,$$

شرط اولیه بصورت زیر است:

$$(l^2 + L^2)a_0 + L^2(l^2 + L^2/5)a_1 = 3u'''/4k, \quad (136)$$

و از روی شرط دوم:

$$(l^2 + L^2)a_0 - L^2a_1 = u'''/2k. \quad (137)$$

پاسخ معادله (136) و (137) برای  $a_1$  و  $a_0$  به صورت زیر در می‌آید:

$$a_0 = \left( \frac{u'''}{4kl^2} \right) \frac{5 + (\frac{2}{5})(L/l)^2}{[1 + (L/l)^2][2 + (\frac{1}{5})(L/l)^2]},$$

$$a_1 = \left( \frac{u'''}{4kl^2} \right) \frac{(1/L)^2}{2 + (\frac{1}{5})(L/l)^2}.$$

از اینرو معادله ریتز درجه دوم به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\theta(x, y)}{u'''L^2/k} = \frac{1}{4} \frac{[1 - (x/L)^2][1 - (y/l)^2]}{[2 + (\frac{2}{5})(L/l)^2]} \left[ \frac{5 + (\frac{2}{5})(L/l)^2}{1 + (L/l)^2} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]. \quad (138)$$

تقریب درجات بالای کانتروویج دوباره وابسته به نسبت  $L/l$  می باشد و به صورت زیر انتخاب می شود:

$$\theta(x, y) = (l^2 - y^2)[X_1(x) + y^2X_2(x) + y^4X_3(x) + \dots] \quad (139)$$

یا:

$$\theta(x, y) = (L^2 - x^2)[Y_1(y) + x^2Y_2(y) + x^4Y_3(y) + \dots]. \quad (140)$$

که در اینجا:

$$\theta(x, y) = (l^2 - y^2)[X_1(x) + y^2X_2(x)] \quad (141)$$

و به طور دلخواه به صورت تقریب درجه دوم مورد بررسی قرار می گیرد.

با قرار دادن معادله (141) در شکل انتگرالی معادله دیفرانسیل (133) از فصل دوم، نتیجه زیر بدست می آید:

$$4 \int_0^L \int_0^l [l^2X_1'' - y^2X_1'' + l^2y^2X_2'' - y^4X_2'' - 2X_1 + 2l^2X_2 - 12y^2X_2 + (u'''/k)] dx dy = 0, \quad \text{و}$$

با انتگرال گیری در جهت  $y$  نتیجه زیر بدست می آید:

$$4 \int_0^L \left[ \frac{2}{3}l^3X_1'' + \frac{2}{15}l^5X_2'' - 2lX_1 - 2l^3X_2 + \frac{u'''l}{k} \right] dx = 0,$$

که در اینجا جملات زیر انتگرال مساوی صفر قرار داده می شوند. نتیجه به این صورت است:

$$\frac{1}{3}l^2X_1'' + \frac{1}{15}l^4X_2'' - X_1 - l^2X_2 = -\frac{u'''}{2k}. \quad (142)$$

معادله دیفرانسیلی که در مبدأ از روی معادله (141) به دست می آید، به شکل زیر خواهد شد:

$$l^2X_1'' - 2X_1 + 2l^2X_2 = -\frac{u'''}{k}. \quad (143)$$

با قرار دادن اپراتور  $D \equiv d/d$  می توان معادله (142) و (143) را به صورت زیر بازآرایی کرد:

$$\left(\frac{l^2}{3} D^2 - 1\right) X_1 + l^2 \left(\frac{l^2}{15} D^2 - 1\right) X_2 = -\frac{u'''}{2k}, \quad (144)$$

$$(l^2 D^2 - 1) X_1 + 2l^2 X_2 = -\frac{u'''}{k}. \quad (145)$$

با حل معادله (144) و (145) برای  $X_1$  و  $X_2$  بوسیله تئوری دترمینان‌ها یا بوسیله حذف جبری خواهیم داشت:

$$\left(\frac{l^4}{15} D^4 - \frac{9l^2}{5} D^2 + 4\right) X_1 = 2\frac{u'''}{k}, \quad (146)$$

$$\left(\frac{l^4}{15} D^4 - \frac{9l^2}{5} D^2 + 4\right) X_2 = 0. \quad (147)$$

پاسخ ویژه معادله (146)،  $u'''/2k$  می‌باشد. پاسخ کلی معادله (147) و قسمت همگن معادله (146) به صورت

چهار تابع هیپربولیک  $\sinh \alpha(x/l)$ ،  $\cosh \alpha(x/l)$ ،  $\sinh \beta(x/l)$  و  $\cosh \beta(x/l)$  که در اینجا:

$$\alpha = [27/2 - (489/4)^{1/2}]^{1/2}, \quad \beta = [27/2 + (489/4)^{1/2}]^{1/2}$$

و  $\pm \alpha/l$  و  $\pm \beta/l$  ریشه‌های معادله زیر است:

$$(1/15)r^4 - (9/5)r^2 + 4 = 0.$$

بنابراین پاسخ کلی  $X_1$  و  $X_2$  بدست می‌آید. پاسخ غیرمتقارن حرارتی  $\sinh \alpha(x/l)$  و  $\sinh \beta(x/l)$  بصورت

زیر می‌شود:

$$X_1 = \frac{u'''}{2k} + A \cosh \alpha \left(\frac{x}{l}\right) + B \cosh \beta \left(\frac{x}{l}\right),$$

$$X_2 = C \cosh \alpha \left(\frac{x}{l}\right) + D \cosh \beta \left(\frac{x}{l}\right). \quad (148)$$

(149)

در اینجا چهار ثابت  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  از روی فرآیند حذفی ملاحظه شده بین روابط (144) و (145) بدست

می‌آید که این ثوابت مستقل از هم نیستند. برای محاسبه رابطه بین این ثوابت، معادله (148) و (149) در معادله

(143) جایگذاری شده و نتیجه مساوی صفر قرار داده می‌شود. بنابراین روابط زیر بدست می‌آید:

$$(\alpha^2 - 2)A + 2l^2C = 0,$$

$$(\beta^2 - 2)B + 2l^2D = 0.$$

نتایج مشابهی نیز با استفاده از معادله (۱۴۲) قابل حصول است. بنابراین در واقع تنها دو ثابت از ۴ ثابت اختیاری است. با بدست آوردن  $C$  بر حسب  $A$  و  $D$  بر حسب  $B$  و جایگذاری نتایج در معادلات (۱۴۸) و (۱۴۹) نتایج زیر بدست می آید:

$$X_1 = \frac{u'''}{2k} + A \cosh \alpha \left( \frac{x}{l} \right) + B \cosh \beta \left( \frac{x}{l} \right), \quad (150)$$

$$X_2 = - \left( \frac{\alpha^2 - 2}{2l^2} \right) A \cosh \alpha \left( \frac{x}{l} \right) - \left( \frac{\beta^2 - 2}{2l^2} \right) B \cosh \beta \left( \frac{x}{l} \right). \quad (151)$$

در نهایت شرایط مرزی در جهت  $x$  به صورت زیر ارضا می شود:

$$X_1(L) = 0, \quad X_2(L) = 0,$$

با این شرایط معادلات زیر بدست می آید:

$$A = - \left( \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - \alpha^2} \right) \frac{u'''/2k}{\cosh \alpha(x/l)}, \quad B = \left( \frac{\alpha^2 - 2}{\beta^2 - 2} \right) \frac{u'''/2k}{\cosh \beta(x/l)}. \quad (152)$$

از اینرو با ترکیب معادلات (۱۴۱)، (۱۵۰)، (۱۵۱) و (۱۵۲)، پروفایل کانترویج درجه دوم بدست می آید:

$$\frac{\theta(x, y)}{u'''l^2/k} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right] \left\{ 1 - \left( \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - \alpha^2} \right) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right] \frac{\cosh \alpha(x/l)}{\cosh \alpha(L/l)} \right. \quad (153)$$

$$\left. + \left( \frac{\alpha^2 - 2}{\beta^2 - \alpha^2} \right) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right] \frac{\cosh \beta(x/l)}{\cosh \beta(L/l)} \right\}. \quad \text{ادامه}$$

بحث در مورد پاسخ های تقریبی به فصل ۸ ماکول می شود. در اینجا مطالعه مسائل مختصات کارترین پایان یافته

و در جلسه بعد به بررسی مسائل دو بعدی مختصات استوانه ای پرداخته می شود.



## ۵- خلاصه (جمع بندی)

مباحث قبلی مان به مسائل یک بعدی پایا محدود می شد. بطور کلی از آنجاییکه اینگونه مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حاصل می کنند، معمولاً قابل حل می باشند. به عبارت دیگر، مسائل پایای دو و سه بعدی و مسائل ناپایا، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را حاصل می کنند، که هیچ راه حل کلی برای آنها وجود ندارد. در این جلسه و جلسات بعد، چندین روش برای حل دقیق این مسائل ارائه شده است.

وقتی که مرزهای یک مسأله، هدایت چند بعدی متناظر با سطوح مختصات در یک سیستم مختصات متعامد مثل مختصات‌های کارتزین، استوانه‌ای، یا کروی باشد، یک راه دقیق توسط روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. یک روش متداول بر اساس جداسازی متغیرها، و دیگری بر اساس تبدیل لاپلاس می‌باشد. دلایل متقاعدکننده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهند این دو روش متداول‌تر، برای حل مسائل ویژه مناسب‌ترند؛ اگرچه، تبدیل لاپلاس برای حل مسائل پیچیده مناسب است، اما نیازمند آگاهی از ریاضیات پیشرفته‌تری است. بنابراین، بحث پیرامون تبدیل لاپلاس را که در فصل ۷ کتاب عنوان شده است را در این درس مطرح نمی‌نمایم و این فصل را به روش جداسازی متغیرها اختصاص می‌دهیم. در این جلسه به کمک روش جداسازی متغیرها، معادلات پایای دو بعدی در مختصات کارتزین را حل نمودیم.

## ۶- فهرست منابع

1. Conduction Heat Transfer, By: V. S. Arpachi, Addison – Wesley, 1966, 1991.
2. Heat Conduction, By: S. Kakas, Y. Yener, Taylor & Francis, 1993.

انتقال حرارت هدایتی، نویسنده: آرپاچی، مترجمان: غفار برهانی، رضایی منش و جدیدی